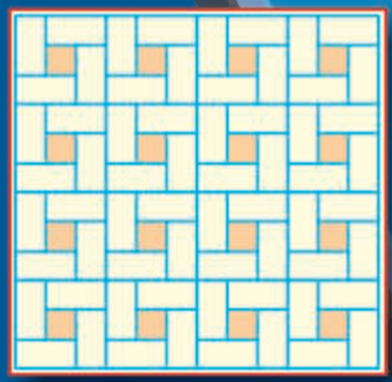
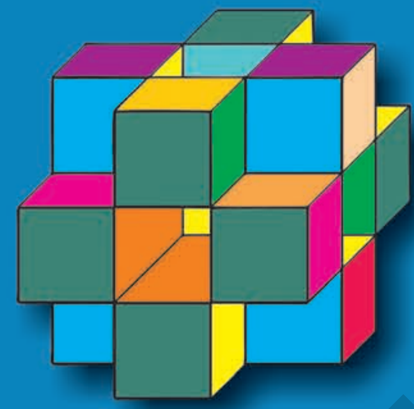




राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद
तेलंगाणा, हैदराबाद

गणित

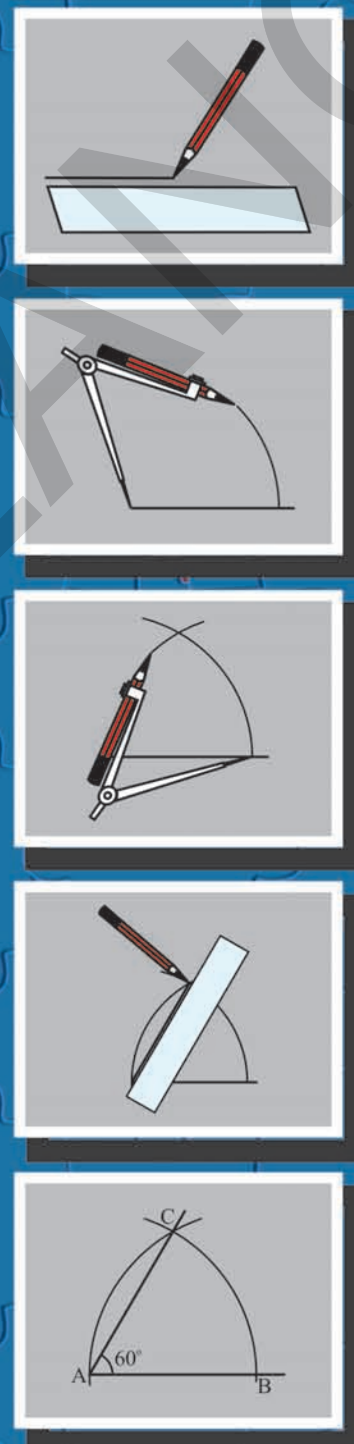
कक्षा - VIII

गणित

FREE

Mathematics
Class - VIII
(Hindi Medium)

कक्षा - VIII



तेलंगाणा सरकार द्वारा निशुल्क वितरण

तेलंगाणा सरकार द्वारा प्रकाशित
हैदराबाद

सीखने की संप्राप्तियाँ (LEARNING OUTCOMES)

गणित (MATHEMATICS) कक्षा - आठ (Class - VIII)

बच्चे-

- एक पद्धति द्वारा परिमेय संख्याओं के जोड, घटान, गुणा तथा भाग के गुणधर्मो का सामान्यीकरण करेंगे।
- दिए गए दो परिमेय संख्याओं के मध्य वांछित परिमेय संख्या ज्ञात करेंगे।
- बिजगणितीय पद्धति से 2,3,4,5,6,9 तथा 11 के विभाजकता के सिद्ध करेंगे तथा दैनिक जीवन की समस्या तथा पहेलियों को हल करेंगे।
- घातांकी नियमों की सहायता से दैनिक जीवन की समस्याओं को हल करेंगे।
- विभिन्न पद्धतियों की सहायता से वर्ग, घन, वर्गमूल तथा घनमूलों को ज्ञात करेंगे।
- प्रतिशत की आधारण को लाभ-हानी, कटौती, VAT साधारण ब्याज तथा चक्रवृद्धि ब्याज में अनुप्रयोग करेंगे तथा सीधाअनुपात तथा बिलोमानुपात के प्रश्नों को हल करेंगे।
- बिजागणितीय व्यंजकों तथा सर्वसमता की सहायता से दैनिक जीवन की समस्याओं को हल करेंगे। एक चरराशि वाले रैखिक समीकरणों को भी हल करेंगे।
- दिए गए मापों से चतुर्भुजों की रचना करेंगे।
- सूत्रों की सहायता से समचतुर्भुज तथा समलंब चतुर्भुजों के क्षेत्रफल ज्ञात करेंगे साथ ही बहुभुज तथा विषम चतुर्भुजों को त्रिभुजों में विभारगत कर क्षेत्रफल ज्ञात करेंगे।
- चित्रों तथा आकृतियों के क्षेत्रफल को वृत्त तथा वृत्तखण्डों की सहायता से ज्ञात करेंगे।
- घन तथा घनाभ के पार्श्वतल के क्षेत्रफल तथा आयतन को ज्ञात करेंगे।
- सारणी रूप में दिए गए दत्तों से मध्यामान, मध्यिका तथा बहुलक ज्ञात करेंगे।
- दिए गए दत्तों को स्तंभ चित्र, बारंबारिता बक्र तथा पाई चित्र द्वारा प्रदर्शित करेगा।

बच्चों ! ये सूचनायें आपके लिये

1. प्रत्येक अवधारणा को समझसे के लिये, उचित चित्र के साथ एक वास्तविक जीवन प्रसंग पाठ्यपुस्तक में दिया गया हैं। चित्र की टिप्पणियों के साथ, संदर्भ के इच्छुक, पढ़ने के माध्यम से, अवधारणा को समझने का प्रयास करें ।
2. गतिविधयों की अवधारणाओं को समझते समय कुछ संदेह उत्पन्न हो सकते हैं । इनको अपने मित्रों और शिक्षकों के साथ चर्चा के माध्यम से उन संदेहों को स्पष्ट करें और बिना कोई शंका के गणितीय अनवधारणाओं को समझें।
3. " इन्हें कीजिये " अभ्यास स्वयं प्रयत्न के लिये दिया जाता है जिससे यह ज्ञात हो कि अवधारण्य आपको कहाँ तक समझमें आई है । यदि आप इन अभ्यासों में समस्याओं को हम करने में कोई कठिनाई का सामना कर रहे हैं, तो आप अपने शिक्षक के साथ चर्चा करके उन्हें स्पष्ट करें ।
4. " प्रयास कीजिये" में दी गई समस्याओं को रचनात्मक और बड़े पैमाने पर सोच कर, तर्क के द्वारा हल किया जा सकता है । आप इन समस्याओं को हल करने में कठिनाई का सामना करते हैं, तो आप अपने मित्रों और शिक्षकों की सहायता ले सकते हैं ।
5. " सोचिये और चर्चा कीजिये " में दी गई कार्यविधियाँ, या गतिविधियाँ, गंभीर सोच की अवधारणा की व्यापकता को समझने के लिये दिये गये हैं । इन गतिविधियों को अपने साथी छात्रों और शिक्षकों के साथ चर्चा द्वारा हल किया जाना चाहिये ।
6. अध्याय में चर्चा की गई–विभिन्न अवधारणाओं के साथ समस्याओं के विभिन्न प्रकार के अवधारणा/अध्याय के अंत में दिये गये अभ्यास में हैं । स्कूल में, घर में या अवकाश के समय में अपने आप इन समस्याओं को हल करने का प्रयास करें ।
7. अभ्यास "प्रयत्न करो/प्रयास कीजिये" का उद्देश्य केवल कक्षा में, स्वयं शिक्षक की उपस्थिति में समस्याओं को हल करने के लिये है ।
8. जहाँ भी पाठ्यपुस्तक में दिया जाता है "परियोजना कार्य" आप उसे समूहों में आचरण करना चाहिये, लेकिन परियोजना के निर्माण की रिपोर्ट को व्यक्तिगत रूप से प्रस्तुत करना चाहिये ।
9. उक्त दिन गृहकार्य के रूप में दी गई समस्याओं को हल करने का प्रयास करें । अपने संदेहों को स्पष्ट करें और अपने शिक्षकों के साथ विचार विमर्श करने के पश्चात उसी दिन उसका सुधार करें ।
10. अधिक समस्याओं को इकठ्ठाकर, सीखी गई अवधारणाओं पर नई समस्याओं बनाये और उन्हें अपने साथी शिक्षकों और सहपाठियों दिखाने का प्रयास करें ।
11. अनेक पहेली, खेल और गणितीय अवधारणाओं से संबंधित रोचक बातें इकठ्ठा करें और अपने मित्रों और शिक्षकों के साथ साझा (share) करने का प्रयास करें ।
12. केवल कक्षा के लिये गणितीय अवधारणाओं को सीमित न रखें । कक्षा के बाहर अपने परिवेश के साथ उन्हें संबंधित करने का प्रयास करें ।
13. छात्र, समस्याओं का समाधान और कारण दें, और सिद्ध करें, गणितीय संवाद करने में सक्षम हों, अधिक अवधारणाओं को समझने,संवाद करने में सक्षम हों, अधिक अवधारणाओं को समझने और समस्याओं और गणितीय अध्ययन में प्रतिनिध्व करने के लिये, सक्षम हल करने के लिये अवधारणाओं को कनेक्ट करना होगा ।

गणित
कक्षा-8

MATHEMATICS
CLASS - VIII
(Hindi Medium)

पाठ्यपुस्तक निर्माण एवं प्रकाशन समिति

मुख्य उत्पादन अधिकारी : **श्री ए. सत्यनारायण रेड्डी**
निदेशक,
राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद,
हैदराबाद।

मुख्य कार्यकारी संयोजक : **श्री बी. सुधाकर**
निदेशक,
राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद,
हैदराबाद।

कार्यकारी संयोजक : **डॉ. एन. उपेंदर रेड्डी**
अध्यक्ष,
पाठ्यक्रम एवं पाठ्यपुस्तक विभाग,
राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद,
हैदराबाद।

तेलंगाणा सरकार द्वारा प्रकाशित, हैदराबाद

विद्या से बढ़ें।
विनय से रहें।

क़ानून का आदर करें।
अधिकार प्राप्त करें।

First Published 2013

New Impressions 2014, 2015, 2017,2018, 2019,2020

This Book has been printed on 70 G.S.M. Maplitho
Title Page 200 G.S.M. White Art Card

Free distribution by Telangana Government 2020-21

Printed in India
at the Telangana Govt. Text Book Press,
Mint Compound, Hyderabad,
Telangana.

पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति

गणित आधार पत्र, पाठ्यक्रम एवं पाठ्यपुस्तक निर्माण प्रमुख

प्रो. वी. कन्नन, अध्यक्ष, गणित एवं सांख्यिकीशास्त्र विभाग, हैदराबाद विश्वविद्यालय।

मुख्य सलाहकार

श्री चुक्का रामय्या, शिक्षाविद, हैदराबाद।

डॉ. एच. के. दीवान, शिक्षा सलहाहकार, विद्या भवन सोसाइटी, रिसोर्स सेंटर, उदयपुर, राजस्थान।

लेखक गण

श्री वेंकट राम कुमार, एच.एम., जेड.पी.पी.एच.एस. मुलुमुडि, नेल्लूर

श्री गोट्टुमुक्कला वी.बी.एस.एन. राजु, एस.ए., म्यूनिसिपल हाई स्कूल कस्पा, विजयनगरम।

श्री सोम प्रसाद बाबु, पी.जी.टी.,ए.पी.टी.डबल्यू.आर.एस., चंद्रशेखरपुरम, नेल्लूर

श्री के. वरदा सुंदर रेड्डी, एस.ए., जेड.पी.पी.एच.एस. तक्कसिला, आलमपुर, मबहूब नगर।

श्री कोमनदूरि मुरली श्रीनिवास, पी.जी.टी., ए.पी.टी.डबल्यू.आर.एस. स्कूल ऑफ एक्सिलेंस, श्रीशैलम।

श्री अब्बराजु किशोर, एस.जी.टी., एम.पी.यू.पी.एस. चमल्लमुडि, गुंटूर।

श्री पडाला सुरेश कुमार, एस.ए., जी.एच.एस. विजयनगर कालोनी, हैदराबाद।

श्री जी. अनंत रेड्डी, सेवानिवृत्त एच.एम., रंगा रेड्डी।

श्री पी.डी.एल. गनपति शर्मा, एस.ए., जी.एच.एस. ज़मिस्तानपुर, माणिकेश्वर नगर, हैदराबाद।

श्री एम. रामांजनेयुलु, प्रवक्ता, डी.आई.ई.टी.विकाराबाद, रंगा रेड्डी।

श्री एम. दुग्गराजु वेणु, एस.ए., यू.पी.एस. अल्लावाडा, चेवेल्ला, रंगा रेड्डी।

श्री एम. रामा चारी, प्रवक्ता, डी.आई.ई.टी.विकाराबाद, रंगा रेड्डी।

श्री. पी. एंथनी रेड्डी, एच.एम. सेंट पीटर्स हाई स्कूल, आर.एन.पेट, नेल्लूर।

डॉ. ए. रामबाबु, प्रवक्ता, सरकारी सी.टी.ई. वरंगल।

श्री. पी. मनोहर, एस.ए., जेड.पी.एच.एस. ब्राह्मणपल्ली, तद्वाई, निजामाबाद।

डॉ. पूंड्ला रमेश, प्रवक्ता, सरकारी आई.ए.एस.ई., नेल्लूर।

समन्वयक

श्री काकुलवरम राजेंदर रेड्डी, समन्वयक, गणित पाठ्यपुस्तक, एस.सी.ई.आर.टी., हैदराबाद।

श्री वेंकट राम कुमार, एच.एम., जेड.पी.पी.एच.एस. मुलुमुडि, नेल्लूर

हिंदी अनुवाद संपादक

श्रीमती एस. पद्मा, सेवानिवृत्त प्रवक्ता, हिंदी महाविद्यालय, नल्लाकुंटा, हैदराबाद।

हिंदी अनुवाद समन्वयक

डॉ. पी. शारदा, एस.सी.ई.आर.टी., हैदराबाद।

डॉ. राजीव कुमार सिंह,यू.पी.एस., याडारम, मेड्चल, रंगारेड्डी

हिंदी अनुवादक समूह

श्रीमती रंजना, प्रधानाध्यापिका, नवजीवन बालिका विद्यालय, रामकोटी, हैदराबाद।

श्रीमती अफ़रोज जबीन, प्रधानाध्यापिका, प्राथमिक स्तर, नवजीवन बालिका विद्यालय, रामकोटी, हैदराबाद।

श्रीमती रमा, मारवाड़ी हिंदी विद्यालय, सिकंदराबाद।

श्रीमती उमा निकम, एल.एम.जी.हाई स्कूल, बेगम बाज़ार, हैदराबाद।

श्री ए. रामचंद्रय्या, एस.ए., ज़ेड.पी.एच.एस. रामपल्ली, कीसरा, रंगारेड्डी।

श्री टी. अजय सिंह, एस.ए., ज्ञानप्रकाश हाई स्कूल, घोशामहल, हैदराबाद।

श्रीमती पुष्पलता, अध्यापिका, श्री गुजराती विद्या मंदिर हाई स्कूल, कोठी, हैदराबाद।

संपादक

डॉ. एस. सुरेश बाबु, प्रोफेसर, एस.सी.ई.आर.टी., हैदराबाद।

डॉ.जी.एस.एन.मूर्ति, रीडर, राजह आर.एस.आर.ख.आर.आर. कॉलेज, बोब्बिली, विजयनगरम।

प्रो. एन. सीएच. पट्टाभि रामाचार्युलु, (सेवानिवृत्त) नेशनल इंस्टिट्यूट ऑफ टेक्नालजी, वरंगल।

प्रो. वी. शिव रामप्रसाद, (सेवानिवृत्त), गणित विभाग, उस्मानिया विश्वविद्यालय, हैदराबाद।

श्री ए. पद्मनाभन, (सेवानिवृत्त), अध्यक्ष, गणित विभाग, महारानी कॉलेज, पद्दापुरम। प्रवक्ता, एस.सी.ई.आर.टी., हैदराबाद।

श्री के ब्रह्मय्या, सेवानिवृत्त प्रोफेसर, एस.सी.ई.आर.टी., हैदराबाद।

शैक्षिक सहायक समूह सदस्य

श्री इंदर मोहन, **श्री यशवंत कुमा दवे,**
श्री हमीफ पलिवाल, **श्री आशिश चोर्डिया,**
विद्या भवन सोसाइटी, रिसोर्स सेंटर, उदयपुर, राजस्थान।

श्री शरण गोपाल, कुमारी एम.अर्चना, श्री पी.चिरंजीवी,
गणित एवं सांख्यिकीशास्त्र विभाग, हैदराबाद विश्वविद्यालय।

श्रीमती नीरजा, जी.पी.एस., सी.पी.एल., अंबरपेट, हैदराबाद।

चित्रकार एवं डिज़ाइन समूह

श्री प्रशांत सोनी, एसके.शकीर अहमद, एस.एम. इकराम,
विद्या भवन सोसाइटी, रिसोर्स सेंटर, उदयपुर, राजस्थान।

आमुख

शिक्षण मानव प्रबोधन और सशक्तीकरण की प्रक्रिया है। शिक्षण की इस विशाल क्षमता को ध्यान में रखते हुए सभी प्रगतिशील सामाजिक तत्वों ने इसके वैश्वीकरण तथा सबके लिए गुणवत्तापूर्ण शिक्षा प्रदान करने का निश्चय किया है। फलस्वरूप माध्यमिक शिक्षा के वैश्वीकरण में तीव्रता आई है।

माध्यमिक स्तर पर, प्राथमिक स्तर की शिक्षा द्वारा सीखे गये गणितीय ज्ञान की समृद्धता की अनुशासित शुरुआत होती है। तार्किक भावनाओं, प्रमेयों आदि को इस स्तर पर परिचय कराया जाता है। साथ ही साथ गणित एक विशिष्ट विषय होने के साथ अन्य विषयों के अंतर्गत तार्किक विश्लेषण में भी सहायक होता है।

मुझे विश्वास है कि आंध्र प्रदेश के इस स्तर के छात्र, इस पाठ्यपुस्तक को पढ़कर गणित का आनंद लेंगे, अपने दैनिक जीवन के अनुभवों और समस्याओं में गणित का उपयोग कर सकेंगे, गणित की मूल भावनाओं व संरचनाओं को समझ सकेंगे।

अध्यापकों के लिए पाठ्यक्रम व शिक्षण संबंधी दृष्टिकोण के समीक्षात्मक अंशों को समझना और आत्मसात करना, साथ ही गुणात्मक शिक्षण पर ध्यान देना आज की विशेष आवश्यकता है। इसके लिए कक्षा में समावेशी व सहयोगपूर्ण माहौल की आवश्यकता है ताकि शिक्षण-अधिगम प्रक्रिया को प्रभावी बनाया जा सके। सकारात्मक कक्षाकक्ष वातावरण का निर्माण एक ऐसी शक्ति है जिसके माध्यम से बच्चों के रहन-सहन को संस्कारित एवं प्रभावित किया जा सकता है।

ए.पी.एस.सी.एफ.-2011 में गणित आधार पत्र के सिद्धांतों की विस्तारपूर्वक प्रस्तुति है। साथ ही साथ कक्षागत पाठ्यक्रम और शैक्षिक मापदंड निर्दिष्ट हैं। इन सबको पाठ्यपुस्तक बनाते समय ध्यान में रखा गया है। पाठ्यपुस्तक निर्माण के समय संवेदनशील मुद्दों के प्रति विशेष सावधानी बरती गई है।

राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद, पाठ्यपुस्तक निर्माण में सहयोग देने वाली पााठ्यपुस्तक निर्माण समिति, राष्ट्रीय स्तर के विषय विशेषज्ञ, विश्वविद्यालय आचार्य, शिक्षाविद्, लेखकगण, चित्रकार, प्रकाशन विभाग आदि के प्रति कृतज्ञतापूर्ण धन्यवाद अर्पित करती है। साथ ही साथ परिषद, पाठशाला शिक्षा विभाग, जिला शिक्षा अधिकारी, मंडल शिक्षा अधिकारी, प्रधानाध्यापक, अध्यापक एवं उन सभी लोगों को धन्यवाद देती है जिनका सहयोग इस पाठ्यपुस्तक के निर्माण में प्रत्यक्ष एवं परोक्ष रूप से प्राप्त हुआ है। पाठ्यपुस्तक की गुणवत्ता में सुधार हेतु राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद, आंध्र प्रदेश, हैदराबाद आपके सुझावों का स्वागत करेगी।

स्थान : हैदराबाद
दिनांक: 03.12.2012

निदेशक
राज्य शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद
तेलंगाणा, हैदराबाद

प्राक्कथन

तेलंगाना सरकार ने तेलंगाना राज्य पाठ्यचर्या की रूपरेखा (SCF - 2011) के आधार पर तेलंगाना के पाठ्यक्रम में संशोधन का निर्णय लिया है जो बच्चों की पाठशाला और बाहरी जीवन को जोड़ने पर बल देती है। शिक्षा का अधिकार अधिनियम (RTE - 2009) यह कहता है कि प्रत्येक बच्चा जो पाठशाला में प्रवेश करता है, 14 वर्ष की आयु तक प्रत्येक स्तर के लिए निर्धारित अपेक्षित दक्षताओं की प्राप्ति करे। राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (NCF- 2005) द्वारा प्रस्तावित सुझावों को विशेष कर हमने माध्यमिक स्तर पर गणित और विज्ञान में प्रमुखता दी है जिससे हमारे विद्यार्थियों में इन विषयों से संबंधित मजबूत आधारशिला रखी जा सके।

किसी राष्ट्र की शक्ति उसकी वचनबद्धता और क्षमता पर आधारित होती है जो उसके लोगों की आवश्यकताओं, आकांक्षाओं और सुविधाओं की प्राप्ति के लिए एक प्रगतिशील प्रौद्योगिकीय समाज का निर्माण कर सके।

गणित के पाठ्यक्रम को संरचनागत एवं समावेशी आधार पर तीन स्तरों में विभाजित किया गया है, वे हैं-प्राथमिक, उच्च प्राथमिक और माध्यमिक। माध्यमिक स्तर के गणित अध्यापकों को कक्षा 8 से 10 तक के पाठ्यक्रम को बृहत एवं गहराई से समझने के लिए उन गणित की संकल्पनाओं के अध्ययन की आवश्यकता है जो बच्चों ने प्राथमिक और उच्च प्राथमिक स्तर पर सीखी हैं।

यह पाठ्यक्रम संरचनात्मक दृष्टिकोण, अन्वेषणात्मक प्रविधि और गणितीय मूल संकल्पनाओं व उनके सामान्यीकरण पर आधारित है। यह प्रविधि बच्चों को कक्षाकक्ष प्रक्रिया में उत्साह के साथ भाग लेने और चर्चा करने के लिए प्रोत्साहित करती है।

प्रस्तुत पाठ्यपुस्तक टी.एस.एस.सी.ई.आर.टी. द्वारा प्रस्तावित पाठ्यक्रम की रूपरेखा और अपेक्षित दक्षताओं के मिश्रण एवं संशोधन के आधार पर बनाई गई है।

- पूरे पाठ्यक्रम को मुख्य रूप से छः भागों में विभाजित किया है- (1) अंक व्यवस्था, (2) बीजगणित, (3) अंक गणित, (4) ज्यामिति, (5) क्षेत्रमिति और (6) आँकड़ों का प्रबंधन। क्षेत्रफल से संबंधित बिंदुओं के शिक्षण द्वारा हम अपेक्षित दक्षताओं में निहित कौशलों जैसे, समस्या समाधान, तार्किक चिंतन, गणितीय संचार, प्रदत्तों का विविध रूपों में प्रस्तुतीकरण, अध्ययन में गणितीय सिद्धांतों को अपनाना और इनका दैनिक जीवन में उपयोग करना आदि का विकास किया जा सकता है।

  पाठ्यपुस्तक में विद्यार्थियों को मनन करने के अवसर प्रदान करने पर बल दिया गया है। इसमें छोटे समूहों में चर्चा करने संबंधी क्रियाकलाप दिये गये हैं। साथ ही 'इसे कीजिए' और 'प्रयत्न कीजिए' जैसे क्रियाकलाप व अभ्यास उनके अनुभव का गणित में उपयोग करने पर बल देते हैं। अध्यापक को कक्षाकक्ष में इन क्रियाकलापों के आयोजन के लिए आवश्यक कदम उठाने चाहिए।

इस पाठ्यपुस्तक की कुछ विशेष गुण निम्नलिखित हैं-

- अध्यायों को इस प्रकार से विविधता प्रदान करते हुए व्यवस्थित किया गया है जिससे छात्र संपूर्ण पाठ्यक्रम के प्रत्येक भाग के अध्ययन में रुचि ले सकें।

- उच्च प्राथमिक स्तर पर ज्यामितीय संकल्पनाओं को मापन और कागजों को मोड़ने जैसे क्रियाकलापों के माध्यम समझाया गया था। अब हम स्वयंसिद्ध करने की पद्धति को अपना रहे हैं। अनेक बार हमने रचना बनाकर, गणितीय संकल्पनाओं को समझा व परिभाषित किया है। इन परिभाषित व अपरिभाषित संकल्पनाओं को समझना व उनके बीच के संबंध जानना, हम इस स्तर पर सीखेंगे। तार्किक ढंग से किसी निष्कर्ष पर पहुँचना प्रमेय कहलाता है। विशेष बात यह है कि प्रत्येक प्रमेय को समझने व सिद्ध करने के लिए आरंभ में संबंधित क्रियाकलाप दिये गये हैं।
- सतत समग्र मूल्यांकन प्रक्रिया को '**प्रयत्न कीजिए**'और '**सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए**' जैसी क्रियाओं के माध्यम से इसमें समावेशित करने का प्रयास किया गया है। अध्यायों के अंतर्गत आने वाली प्रत्येक संकल्पना के बाद अभ्यास दिये गये हैं जिससे अध्यापक आकलन कर सके कि बच्चा अध्याय का कौनसा भाग, कितनी सीमा तक समझने में सफल हुआ है।
- संपूर्ण पाठ्यक्रम को 15 अध्यायों में विभाजित किया गया है जिससे बच्चे प्रत्येक संकल्पना से संबंधित अंशों की वस्तुनिष्ठता से परिचित हो सकें और गणित सीखने की प्रक्रिया में आनंद का अनुभव करें।
- रंगीन चित्र, आकृतियाँ, पढ़ने लायक मुद्रित अक्षरों के आकार निश्चित रूप से बच्चों को अपनी ओर आकर्षित करेंगे और वे इस पाठ्यपुस्तक की विषयवस्तु को भलीभाँति समझने में सहायक होंगे।

अध्यायों का विवरण (1) : परिमेय संख्याओं को समझने के लिए अंक व्यवस्था के विविध व्यवस्थाओं का परिचय दिया गया है जिससे छात्र अनुमान लगा सकें कि भिन्न, परिमेय संख्याओं से किस प्रकार भिन्न होते हैं? रचनात्मक उदाहरणों के माध्यम से परिमेय संख्याओं के लक्षणों की चर्चा की गई है। बच्चे परिमेय संख्याओं व दशमलव संख्याओं को संख्यारेखा पर प्रदर्शित करना इस कक्षा में सीखेंगे। अध्याय (6) में **वर्ग एवं वर्गमूल** के माध्यम से हमने बच्चों को इनकी संकल्पनाओं को गुणनखंडन और लंबी भाग विधि द्वारा समझाया है। **घन एवं घनमूल** में भी उदाहरणसहित चर्चा की गई है।

अध्याय (2) (4) (11) और (12) में बीजगणित है। **एक चर वाले रैखिक समीकरण** अध्याय में छात्रों को वाक्यरूपी समस्याओं में चर राशि पहचान कर उसे स्थानांतरण प्रविधि द्वारा ज्ञात करना सिखाया गया है। अध्याय **घातांक एवं घात** में अत्यंत बड़ी एवं छोटी संख्याओं को दशमलव प्रणाली एवं घातों के रूप में प्रस्तुत करना सिखाया गया है। अनेक उदाहरण द्वारा घातांकों एवं घतों की चर्चा की गई है। इनकी जाँच करना सिखाया गया है। **बीजीय व्यंजक** एवं **गुणनखंडन** अध्याय में हमने एक पदीय एवं द्विपदीय व्यंजकों को बताया गया है। इसमें बीजीय व्यंजकों को पहचानना जैसे $(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$, $(a+b)(a-b) \equiv a^2 - b^2$ और $(x \pm a)(x \pm b) = x^2 \pm (a+b)x + ab$ की ज्यामितीय रूप में मूल्यों की जाँच करने संबंधी चर्चाएँ भी शामिल हैं। बीजीय व्यंजकों के गुणनखंडन और उनमें मानों के स्थानांतरण जैसे अनेक अभ्यास बच्चों के लिए दिये गये हैं।

अध्याय (5) **राशियों की तुलना** में अनुपात, समानुपात, गुणात्मक अनुपात, प्रतिशत छूट, लाभ और हानि, विक्रय कर/वैट, साधारण व्याज और चक्रवृद्धि व्याज (वार्षिक, अर्द्धवार्षिक और त्रैमासिक) तथा चक्रवृद्धि व्याज का सूत्रीकरण आदि सिखाये गये हैं। अध्याय (10) **सीधा एवं व्युत्क्रम अनुपात** में सीधा अनुपात, व्युत्क्रम अनुपात और मिश्र अनुपात समस्याओं को दैनिक जीवन की परिस्थितियों से जोड़कर बताया गया है।

अध्याय (15) **संख्याओं से खेल** में बच्चों के अंकगणित संबंधी कौशलों में विकास करने हेतु कुछ संख्याओं के पैटर्न दिये गये हैं। छात्रों को लिए पैटर्न आगे बढ़ाने तथा नये संख्या पैटर्नों के निर्माण हेतु क्रियाकलाप भी दिये गये हैं। विभाजन नियमों के बारे में छात्रों को चर्चा करनी है जिनसे नवीन प्रविधियों का निर्माण होता है। बच्चों की रुचि बढ़ाने हेतु अनेक उदाहरण एवं पहेलियाँ दी गई हैं।

ज्यामिति के बारे में चर्चा करवाने का उद्देश्य आकृतियों व उनके के महत्व को समझाते हुए कल्पना के आधार पर अनेक आकृतियों के विविध पृष्ठों को समझना व निर्माण करना है। अध्याय (3) **चतुर्भुजों की रचना** में अनेक प्रकार के चतुर्भुजों के निर्माण के साथ उनके गुणों के बारे में विवेचन किया गया है। प्रत्येक प्रतिरूपों की रचना के लिए अनेक उदाहरण दिये गये हैं। अध्याय (8) **ज्यामितीय आकृतियों को समझना** और अध्याय (13) 3D **को** 2D **में समझना** में 3D में समतल आकारों के अनेक प्रकार देखने और समझने के अवसर प्रदान किये गये हैं।

आँकड़ों का प्रबंधन में अपने आसपास के प्रदत्तों को तालिकाओं एवं आलेखों के माध्यम से प्रस्तुत करना सिखाया गया है। अध्याय (7) **बारंबारिता बंटन तालिका और आलेख** में अनेक प्रकार की तालिकाओं में दिये गये प्रदत्तों को विविध प्रकार के आलेखों, जैसे- दंड आलेख, आयत या सोपान आलेख, बहुभुज आलेख तथा चाप विकर्ण वक्र आलेख के रूप में प्रस्तुत करना सिखाया गया है। माध्य, मध्यमान एवं माध्यिका की भी पुनरावृत्ति इस अध्याय के अंतर्गत की गई है। वैकल्पिक प्रविधि के माध्यम से जटिल समस्याओं के हल निकालने के विषय में चर्चाएँ भी की गई हैं।

अंत में अध्याय (9) **समतल आकारों का क्षेत्रफल** में समलंब, चतुर्भुज, वृत्त, वृत्ताकार वलय, पंचभुज और अर्द्धवृत्त का क्षेत्रफल और अध्याय (14) **घन एवं घनाभ** में घनों एवं घनाभों के आयतन की चर्चा है।

मात्र अच्छी पाठ्यपुस्तक के निर्माण से गुणवत्तापूर्ण शिक्षा की गारंटी नहीं दी जा सकती, इसके लिए अध्यापकों द्वारा इसे पाठ्यपुस्तक में दिये निर्देशों के अनुसार पढ़ाया जाना भी ज़रूरी है। क्रियाकलापों को कराते समय शिक्षार्थियों की सहभागिता एवं प्रतिभागिता के माध्यम से उनकी समझ के प्रति आश्वस्त हुआ जा सकता है।

इस प्रकार अध्यापकों से यह आशा की जाती है कि वे कक्षाकक्ष में समस्या समाधानों एवं अभ्यास की प्रक्रिया को एक प्रतिमान के रूप में प्रस्तुत करेंगे जिससे छात्र गणितीय संकल्पनाओं को भलीभाँति समझ सकें तथा भावी परिस्थितियों में उनका प्रयोग कर सकें।

इतिहास के पन्नों से

जॉर्ज पोल्या (1887 - 1985)

जॉर्ज पोल्या
(1887-1985)

वर्षों पहले बहुत से लोगों के मन में ये प्रश्न उठते थे कि क्या समस्या-समाधान भी पढ़ाया जा सकता है और क्या प्रतिभा केवल कुछ लोगों में ही होती है? इस संबंध में स्वर्गीय जॉर्ज पोल्या ने एक प्रभावपूर्ण एवं निश्चयपूर्ण उत्तर दिया था। उन्होंने माना था कि समस्या-समाधान के कौशल को सिखाया जा सकता है।

पोल्या का जन्म सन् 1887 में हुआ था। उन्होंने अपनी पीएच.डी. बुडापेस्ट विश्वविद्यालय से गणित में प्राप्त की। उन्होंने बहुत वर्षों तक ज़ूरिच के स्विज फेडरल इंस्टिट्यूट में शिक्षण कार्य किया।

उन्होंने बहुत सी पुस्तकें लिखीं जिनमें सर्वाधिक प्रसिद्ध हुई- 'हाउ टू साल्व आइ' (1945)। इस पुस्तक की लगभग दस लाख प्रतियाँ अबतक बिक चुकी हैं और 17 भाषाओं में इसका अनुवाद किया जा चुका है।

पोल्या ने समस्या समाधान के चार निम्नलिखित सिद्धांत बताये।

I. समस्या समझना (Understand the problem)

इस सिद्धांत अत्यंत स्पष्ट है। बहुत से छात्र केवल समस्या-समाधान इसलिए नहीं कर पाते क्योंकि वे उस समस्या को आंशिक या पूर्ण रूप से समझ नहीं पाते। इस संबंध में अध्यापक को छात्रों से निम्न प्रश्न अवश्य पूछने चाहिए-

• क्या आपने सवाल में दिये गये प्रत्येक शब्द को समझा है? यदि नहीं, तो शब्दार्थ की तालिका, शब्दकोश या जहाँ से वे अर्थ समझें उसकी व्यवस्था की जाये। • आपने जो प्रश्न पूछा है क्या उसे फिर से अपने शब्दों में समझाया जा सकता है? • क्या इस प्रश्न को हम अन्य तरीके से भी पूछ सकते हैं? • इस प्रश्न के मुख्य शब्दों के वास्तविक अर्थ क्या हैं? • क्या आप कुछ गणितीय उदाहरणों का सहारा ले सकते हैं जिससे यह सवाल स्पष्ट हो जाये? • क्या कोई ऐसी आकृति या आकार है जिससे इस समस्या को समझने में सहायता मिल सकती है? • क्या इस समस्या को हल करने के लिए आपके पास जानकारी पर्याप्त है? • क्या जानकारी आवश्यकता से अधिक है? • आप इस समस्या के हल के लिए वास्तव में क्या जानना चाहते हैं?

II. युक्ति पर विचार (Devise a plan)

समस्या समाधान के लिए समस्या को अच्छी तरह समझने के बाद भी ठोस प्रयास की आवश्यकता है। इस बात से भयभीत होने की ज़रूरत नहीं कि समस्या समाधान के लिए आप सही रास्ते पर हैं या नहीं। क्योंकि एक समस्या को हल करने के अनेक मार्ग हो सकते हैं और सफलता के मार्ग तभी बनते हैं जब हम अनेक प्रकार से प्रयास करते हैं। प्रयत्न के समय आपको निम्न प्रकार में से कुछ युक्तियों को अपनाना पड़ सकता है-

• अनुमान और जाँच • पैटर्न पहचाना • क्रम में व्यवस्थित करना • चित्र बनाना • समस्या समाधान के लिए मार्ग के बारे में सोचना • हल किये गये इसी प्रकार की समस्या-समाधान को देखना • संभावनाएँ छाँटना • साधारण समस्याओं को हल करना • समान प्रकार के सवालों को हल करना • अनुरूप समस्याओं को हल करना • सममितता का प्रयोग • प्रतिरूप का प्रयोग • विशेष परिस्थितियों पर ध्यान देना • पृष्ठावलोकन करना • सीधी तार्किकता का प्रयोग • सूत्र का प्रयोग • समीकरण हल करना • सर्वोत्तम विधि अपनाना

III. युक्ति आगे बढ़ाना (Carryout the plan)

युक्ति आगे बढ़ाना उसे खोजने की तुलना में सरल है। इसके लिए आपको ध्यान देने और धैर्य रखने की ज़रूरत होती है क्योंकि आप सब में इसकी क्षमताएँ निहित हैं। यदि कोई एक युक्ति काम में नहीं आती तो उसपर अड़े मत रहिए, उसे छोड़िए और तुरंत नये तरीके से प्रयत्न कीजिए। ऐसा बिल्कुल मत सोचिए कि यह गणित में सवाल हल करने का तरीका है, भले ही उसे किसी विशेषज्ञ व्यक्ति ने ही क्यों न अपनाया हो।

IV. पृष्ठावलोकन (Look back)

अपने द्वारा किये गये समस्या समाधान को फिर से देखना, उसके विश्लेषण व समझने हेतु अत्यंत लाभकारी होता है। इससे पता चलता है कि इस समस्या समाधान रूपी ताले की चाबी (key to solving the problem) क्या है? यह बताता है कि हम "गणितीय शक्ति" कैसे प्राप्त कर सकते हैं। समस्याओं को हल करने के अच्छे तरीको से अपनी योग्यता में अपूर्व वृद्धि की जा सकती है।

गणित
कक्षा-VIII

विषय-सूची

राष्ट्र-गान

- रवींद्रनाथ टैगोर

जन-गण-मन अधिनायक जय हे!
भारत भाग्य विधाता।
पंजाब, सिंध, गुजरात, मराठा,
द्राविड़, उत्कल बंग।
विंध्य, हिमाचल, यमुना, गंगा
उच्छल जलधि-तरंग।
तव शुभ नामे जागे।
तव शुभ आशिष मांगे,
गाहे तव जय गाथा!
जन-गण-मंगलदायक जय हे!
भारत-भाग्य-विधाता।
जय हे! जय हे! जय हे!
जय, जय, जय, जय हे!

प्रतिज्ञा

- पैडिमर्रि वेंकट सुब्बाराव

भारत मेरा देश है और समस्त भारतीय मेरे भाई-बहन हैं। मैं अपने देश से प्रेम करता हूँ और इससे प्राप्त विशाल एवं विविध ज्ञान-भंडार पर मुझे गर्व है। मैं सर्वदा इस देश एवं इसके ज्ञान-भंडार के अनुरूप बनने का प्रयास करूँगा। मैं अपने माता-पिता और अध्यापकों तथा समस्त गुरुजनों का आदर करूँगा और प्रत्येक व्यक्ति के प्रति नम्रतापूर्वक व्यवहार करूँगा। मैं जीव-जंतुओं से भी प्रेमपूर्वक व्यवहार करूँगा। मैं अपने देश और उसकी जनता के प्रति अपनी भक्ति की शपथ लेता हूँ। उनके मंगल एवं समृद्धि में ही मेरा सुख निहित है।

अध्याय 1

परिमेय संख्याएँ (RATIONAL NUMBERS)

1.0 परिचय

सलमा तीन पेन पाँच रुपये की दर से खरीदना चाहती है। उसका दोस्त सतीश भी दो पेन उसी दर में खरीदना चाहता है। इसलिए दोनों थोक दुकान पर जाते हैं। व्यापारी ने कहा कि पाँच पेन वाले एक पैकेट का दाम ₹ 22 हैं। प्रत्येक पेन का दाम कितना है? हम आसानी से इसकी गणना कर सकते हैं। एक पेन का दाम $\frac{22}{5}$ होगा। यह संख्या पुर्ण संख्या नही हो सकती हमें इसे दर्शाने के लिए भिन्नों की आवश्यकता होगी।

आइए कुछ और उदाहरण देखें।

शिमला में एक विशेष दिन दर्ज किये गये तापमान के आँकड़े नीचे तालिका में हैं।

समय	10.00 a.m.	12.00 Noon	3.00 p.m.	7.00 p.m.	10.00 p.m.
तापमान	11 °C	14 °C	17 °C	10 °C	5 °C

प्रत्येक स्थिति में तापमान में परिवर्तन का प्रति घंटा दर क्या है?

स्थिति I सुबह के समय : प्रति घंटा तापमान परिवर्तन दर $\frac{14^0c-11^0c}{2}=\frac{3}{2}$ °C/hr.
(10.00 A.M. - 12.00 Noon)

स्थिति II दोपहर के समय : प्रति घंटा तापमान परिवर्तन दर $\frac{17\,°C-14\,°C}{3}=1$ °C/hr.
(12.00 Noon - 3.00 P.M.)

स्थिति III शाम के समय : प्रति घंटा तापमान परिवर्तन दर $\frac{10\,°C-17\,°C}{4}=\frac{-7}{4}$ °C/hr.
(3.00 P.M. - 7.00 P.M.)

स्थिति IV रात के समय : प्रति घंटा तापमान परिवर्तन दर $\frac{5\,°C-10\,°C}{3}=\frac{-5}{3}$ °C/hr.
(7.00 P.M. - 10.00 P.M.)

ऊपर की सभी स्थितियों में हमें $\frac{3}{2}$ °C, 1 °C, $\frac{-7}{4}$ °C, $\frac{-5}{3}$ °C आदि संख्याएँ प्राप्त हुईं। इन तापमानों में उपयोग में आई हुई संख्याएँ $\frac{3}{2}$ °C, 1 °C, $\frac{-7}{3}$ °C, $\frac{-5}{3}$ °C हैं। इन संख्याओं को आप क्या कहेंगे?

इन संख्यांओं मे धन और ऋण भिन्न होते है तथा इसे $\frac{p}{q}$ के रुप में लिखा जाता है, जहाँ $q \neq o$

आइए इस तरह की कुछ संख्याओं के बारे में चर्चा करेंगे।

$\frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{-10}{17}, \frac{3}{-2}, \frac{2013}{2014}, ...$

वे संख्याएँ जिन्हें $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं,जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq o$ उन्हें 'परिमेय संख्याएँ' कहलाती हैं। परिमेय संख्याओं के समुच्चय को'Q' से दर्शाते हैं। इन्हें भागफल संख्याएँ भी कहते हैं। ध्यान से देखिए।

हम कोई भी प्राकृतिक संख्या इस रूप में व्यक्त कर सकते हैं,उदाहरण के लिए 5 को $\frac{5}{1}$ या $\frac{10}{2}$ या $\frac{15}{3}$ ....**लिखेंगे**

इसी प्रकार किसी भी पूर्ण संख्या को व्यक्त किया जा सकता है, उदा. 0 को $\frac{0}{1}$ या $\frac{0}{2}$ या $\frac{0}{5}$ .....**लिखेंगे**

हम किसी भी पूर्णांक को इस रूप में व्यक्त कर सकते हैं, जैसे- -3 को $\frac{-3}{1}$ या $\frac{-6}{2}$, ...ये सभी संख्या

अतः $\frac{15}{3}, \frac{0}{5}, \frac{-6}{2}$ **को परिमेय संख्या कहते हैं** ।

ऊपर के निरीक्षण द्वारा हम निष्कर्ष निकालते हैं कि किसी भी प्राकृतिक संख्या, सभी पूर्ण संख्या और पूर्णांक को परिमेय संख्या के रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है।

प्रयत्न कीजिए।

इन संख्याओं के समूहों के बारे में सोचिए। इन्हें योग्य श्रेणी में लिखिए। $1, \frac{1}{2}, -2, 0.5, 4\frac{1}{2}, \frac{-33}{7}, 0, \frac{4}{7}, 0.\overline{3}, 22, -5, \frac{2}{19}, 0.125$. [एक संख्या अनेक समूहों में भी लिखी जा सकती है]

(i) प्राकृतिक संख्याएँ ________________

(ii) पूर्ण संख्याएँ ________________

(iii) पूर्णांक ________________

(iv) परिमेय संख्याएँ ________________

क्या आप दी गई संख्याओं में से कोई परिमेय संख्या छोड़ सकते हैं?

क्या प्रत्येक प्राकृतिक संख्या, पूर्ण संख्या और पूर्णांक, परिमेय संख्याएँ हैं?

प्रयत्न कीजिए।

1. हामिद ने कहा, $\frac{5}{3}$ परिमेय संख्या है और 5 केवल प्राकृतिक संख्या है। साक्षी ने कहा दोनों परिमेय संख्याएँ हैं। आप किससे सहमत हैं?
2. नीचे दिए कथनों के लिए एक-एक उदाहरण दीजिए।
   (i) सभी प्राकृतिक संख्याएँ, पूर्ण संख्याएँ होती हैं किंतु सभी पूर्ण संख्याएँ, प्राकृतिक संख्या हों यह आवश्यक नहीं हैं।
   (ii) सभी पूर्ण संख्याएँ, पूर्णांक होती हैं किंतु सभी पूर्णांक, पूर्ण संख्याएँ नहीं होते।
   (iii) सभी पूर्णांक परिमेय संख्याएँ हैं किंतु सभी परिमेय संख्याएँ, पूर्णांक हों यह आवश्यक नहीं है।

हम परिमेय संख्याओं की मूल संक्रियाओं को पहले की कक्षाओं में ही सीख चुके हैं। अब हम परिमेय संख्याओं के गुणधर्मों और उनकी संक्रियाओं की चर्चा करेंगे।

1.1 परिमेय संख्याओं की संक्रियायें (Operations on Rational numbers)

सातवी कक्षा में हमने परिमेय संख्याओं के जोड घटानों की चर्चा की है। अब उसे कुछ उदाहरणों द्वारा दोहराएँगे।

हल किजिए।

(i) $\frac{9}{10}+\left(\frac{-13}{8}\right)$ (ii) $1\frac{3}{5}+4\frac{2}{7}$

(iii) $\frac{-7}{16}-\left(\frac{-9}{20}\right)$ (iv) $\frac{-11}{14}-\left(\frac{1}{21}\right)$

(v) निम्न संख्याओं के योग विलोम लिखिए. $\frac{-7}{6}, \frac{1}{10}, \frac{-3}{4}, 8$

1.1.1 परिमेय संख्याओं का गुणनफल (Multiplication of Rational Numbers)

अब हम परिमेय संख्याओं को गुणा कैसे करते है, सिखेंगे सातवी कक्षा में भिन्नों के गुणा को सिखा था। उसी प्रक्रिया से हम परिमेय संख्याओं का गुणा करेंगे।

परिमेय संख्या $\frac{2}{3}$ तथा $\frac{5}{7}$ को देखो। ये संख्याये भिन्न भी है।

हम $\frac{2}{3}$ तथा $\frac{5}{7}$ को गुणा करेंगे।

$\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}=\frac{2\times 5}{3\times 7}=\frac{10}{21}$ $\left(\frac{\text{अंशो का गुणनफल}}{\text{हरों का गुणनफल}}\right)$

अब $\frac{-2}{3} \times \frac{5}{7}$ को देखो।

$\frac{-2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{-10}{21}$ प्राप्त होगा।

चलिए अब हम एक और उदाहरण देखेंगे $\frac{-10}{21} \times \frac{14}{25}$

$$\frac{-10}{21} \times \frac{14}{25} = \frac{-10 \times 14}{21 \times 25} = \frac{\overset{28}{\cancel{-140}}}{\underset{105}{\cancel{525}}} = \frac{-28}{105} = \frac{-4}{15}$$

या इसे ऐसे भी हल कर सकते है।

$$\frac{-\overset{2}{\cancel{10}}}{\underset{3}{\cancel{21}}} \times \frac{\overset{2}{\cancel{14}}}{\underset{5}{\cancel{25}}} = \frac{-4}{15}$$

इसे किजिए

(i) $\frac{18}{11} \times \frac{-33}{45}$ (ii) $\frac{-7}{17} \times \frac{-1}{10}$

(iii) $\frac{-105}{72} \times \frac{18}{15}$ (iv) $\frac{13}{120} \times \frac{100}{16}$

1.1.2 परिमेय संख्याओं का भाग (Division of Rational Numbers)

इसे देखिए।

$$\frac{2}{5} \times \frac{5}{2} = 1$$

$$\frac{-9}{11} \times \frac{11}{-9} = 1$$

यहाँ हमने देखा की गुणनफल '1'है। जब किन्ही परिमेय संख्याओं का गुणनफल '1' होता है। तो उन्हें गुणा का विलोम कहते है, यहाँ $\frac{2}{5}$ तथा $\frac{5}{2}$; $\frac{-9}{11}$ तथा $\frac{11}{-9}$ एक दुसरे के गुणन विलोम है।

$\frac{-3}{7}, 11, \frac{9}{5}, \frac{1}{-17}$ के गुणन विलोम लिखाए। सातवी कक्षा में हमने भिन्नों के भाग को सिखा है। परिमेय संख्याओं के भाग के लिए उसी प्रक्रिया का उपयोग करेंगे।

$\frac{3}{4}$ तथा $\frac{7}{11}$ को देखिए ये भिन्न संख्याए है।

हम $\frac{3}{4}$ तथा $\frac{7}{11}$ का भाग करेंगे।

$$\frac{3}{4} \div \frac{7}{11} = \frac{3}{4} \times \frac{11}{7} \qquad \left(\frac{7}{11} \text{ का गुणन विलोम}\right)$$

$$= \frac{3 \times 11}{4 \times 7} = \frac{33}{28} = 1\frac{5}{28}$$

अब हम निम्न उदाहरणों को हल करेंगे।

(i) $$\frac{-5}{9} \div \frac{3}{4} = \frac{-5}{9} \times \frac{4}{3} \qquad \left(\frac{3}{4} \text{ का गुणन विलोम}\right)$$

$$= \frac{-5 \times 4}{9 \times 3} = \frac{-20}{27}$$

(ii) $$\frac{-12}{21} \div \left(\frac{2}{-7}\right) = \frac{-\cancel{12}^{6}}{\cancel{21}_{3}} \times \left(\frac{-\cancel{7}}{\cancel{2}}\right) = \frac{\cancel{6}}{\cancel{3}} = 2 \qquad \left(\frac{2}{-7} \text{ का गुणन विलोम}\right)$$

इसे किजिए

(i) $\frac{8}{5} \div \frac{2}{3}$ (ii) $\frac{18}{25} \div \left(\frac{-72}{75}\right)$

(iii) $\frac{-125}{64} \div \frac{50}{16}$ (iv) $\frac{-512}{441}$ को $\frac{-1024}{21}$ से भाग दिजिए

1.2 परिमेय संख्याओं के गुणधर्म

1.2.1 संवृत (Closure) :

> यदि दो पूर्ण संख्याओं का योग एक पूर्ण संख्या हो तो हम कह सकते हैं कि पूर्ण संख्याओं का समुच्चय योग के सापेक्ष संवृत गुण को संतुष्ट करता है।

(i) पूर्ण संख्याएँ और पूर्णांक

आइए, एक बार पुनः संक्षेप में पूर्ण संख्याओं एवं पूर्णांकों के लिए सभी संक्रियाओं पर संवृत गुणधर्म की चर्चा करते हैं।

इस तालिका को पूर्ण कीजिए जो आवश्यक चर्चा के लिए है। इसमें संबंधित उदाहरण भी हैं।

संख्याएँ	**संक्रियाएँ**			
	योग	**व्यवकलन**	**गुणन**	**भाग**
पूर्ण संख्याएँ	किन्हीं दो पूर्ण संख्याओं a और b के लिए $a + b$ पूर्ण संख्या है, इसलिए यह संवृत है। उदाः	संवृत नहीं हैं $5 - 7 = -2$ जो पूर्ण संख्या नहीं है।	संवृत हैं क्योंकि	संवृत नहीं हैं क्योंकि $5 \div 8 = \frac{5}{8}$ पूर्ण संख्या संख्या नहीं है।
पूर्णांक	....	संवृत है क्योंकि $a-b$ एक पूर्णांक है किन्हीं a और b दो पूर्णांकों के लिए।	....	संवृत नहीं है क्योंकि ....

(ii) परिमेय संख्याएँ - संवृत गुणधर्म

(a) योग

मान लीजिए दो परिमेय संख्याएँ $\frac{2}{7}, \frac{5}{8}$

$$\frac{2}{7}+\frac{5}{8} = \frac{16+35}{56} = \frac{51}{56}$$

परिणाम $\frac{51}{56}$ पुनः परिमेय संख्या प्राप्त हुआ।

$8+\left(\frac{-19}{2}\right) =$ ______ क्या यह परिमेय संख्या है?

$\frac{2}{7} + \frac{-2}{7} =$ ______ क्या उत्तर परिमेय संख्या होगा?

इसे कुछ और संख्याओं के साथ भी जाँच कीजिए।

$3+\frac{5}{7}, \quad 0+\frac{1}{2}, \quad \frac{7}{2}+\frac{2}{7}$

हम देखते हैं कि दो परिमेय संख्याओं का योग पुनः परिमेय संख्या है। अतः योग के सापेक्ष परिमेय संख्याएँ संवृत रहती हैं। यदि (a + b) एक परिमेय संख्या है, कोई भी दो परिमेय संख्याओं के लिए, तो $\forall a, b \in Q$; $(a + b) \in Q$.

(b) व्यवकलन :

मान लीजिए दो परिमेय संख्याएँ हैं $\frac{5}{9}$ और $\frac{3}{4}$

तो $\frac{5}{9} - \frac{3}{4} = \frac{5\times4-3\times9}{36}$

$= \frac{20-27}{36} = \frac{-7}{36}$

फिर हमें परिमेय संख्या $\frac{-7}{36}$ प्राप्त हुआ। (क्योंकि –7, 36 पूर्णांक हैं और 36 शून्य के **समान नहीं** है, अतः $\frac{-7}{36}$ भी एक परिमेय संख्या है।)

इसकी जाँच निम्न परिमेय संख्याओं के संदर्भ में भी कीजिए।

∈ घटक है सब ∀ के लिए

मान लीजिए A = {1, 2, 3}

घटक 3 जो A में है, इस प्रकार दर्शाया जा सकता है 3 ∈A और हम इसे पढ़ते हैं-'3 घटक या सदस्य है A का'

देखिए $x = 1 \Rightarrow 1 + 0 = 1$

$x = 2 \Rightarrow 2 + 0 = 2$

$x = 3 \Rightarrow 3 + 0 = 3$

इसका अर्थ है कि सभी $x \in A$ के लिए हमें $x + 0 = x$ प्राप्त होगा। हम इसे $x + 0 = x\ \forall x \in A$ के रूप में व्यक्त करेंगे। हम इसे इस प्रकार पढ़ेंगे- सभी या प्रत्येक $x \in A$ के लिए; $x + 0 = x$.

(i) $\frac{2}{3} - \frac{3}{7} = \frac{14-9}{21} =$ ______________ क्या यह एक परिमेय संख्या है?

(ii) $\left(\frac{48}{9}\right) - \frac{11}{18} =$ ______________ क्या यह एक परिमेय संख्या है?

हमने पाया कि किन्हीं दो परिमेय संख्याओं के लिए, उनका अंतर भी परिमेय संख्या है।

अतः व्यवकलन के सापेक्ष परिमेय संख्याएँ संवृत रहती हैं।

किन्हीं दो परिमेय संख्याओं a और b के लिए, a - b भी परिमेय संख्या रहती है। अर्थात, $\forall$ a, b $\in$ Q, (a–b) $\in$Q

(c) गुणन

निम्न पर ध्यान दीजिए।

$3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$\frac{6}{5} \times \frac{-11}{2} = \frac{-66}{10} = \frac{-33}{5}$

$\frac{3}{7} \times \frac{5}{2} =$ ___________; $\frac{2}{1} \times \frac{19}{13} =$ ___________

सभी उदाहरणों में हम देखते हैं कि दो परिमेय संख्याओं का गुणनफल एक परिमेय संख्या रहती है। कुछ और परिमेय संख्याओं के युग्मों को गुणा कीजिए। जाँच कीजिए कि गुणनफल परिमेय संख्या है या नहीं। क्या आप ऐसी परिमेय संख्या बता सकते हैं जिनका गुणनफल एक परिमेय संख्या नहीं है। अतः हमें पता चलता है कि गुणा के सापेक्ष परिमेय संख्याएँ संवृत हैं।

किन्हीं दो परिमेय संख्याओं a और b के लिए, $a \times b$ भी एक परिमेय संख्या होगी। अर्थात, $\forall\, a, b \in Q$, $a \times b \in Q$

(d) भाग

दो परिमेय संख्याएँ लीजिए $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{8}$

तो $\frac{2}{3} \div \frac{7}{8} = \frac{2}{3} \times \frac{8}{7} = \frac{16}{21}$ जो कि एक परिमेय संख्या है?

कुछ अन्य उदाहरणों में जाँच कीजिए।

$\frac{5}{7} \div 2 = \frac{5}{7} \div \frac{2}{1} = \frac{5}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{14}$

$-\frac{2}{3} \div \frac{6}{11} =$ __________ $=$ __________ $=$ __________

$3 \div \frac{17}{13} = \frac{3}{1} \div \frac{17}{13} =$ __________ $=$ __________ $=$ __________

ऊपर के सभी उदाहरणों द्वारा हम देखते हैं कि जब हम दो परिमेय संख्याओं का भाग करते हैं तो हमें परिमेय संख्या प्राप्त होती है। अब क्या हम कह सकते हैं कि परिमेय संख्याओं के भाग के लिए संवृत गुण सही है?

आइए, इनकी जाँच करें : 0, 5 परिमेय संख्याएँ हैं और $\frac{5}{0}$ अपरिभाषित है। अतः परिमेय संख्याओं का समूह Q भाग के सापेक्ष संवृत नहीं है।

इस तरह हम कह सकते हैं कि यदि Q में से हम शून्य निकाल दें तो समूह भाग के सापेक्ष संवृत रहता है।

$\frac{5}{0}$ क्यों अपरिभाषित है?
भाग कीजिए। $5 \div 0$ 0) 5 (?
क्या आप भाग पूर्ण कर सकते हैं? भागफल क्या है? आप देखते हैं कि '0' के साथ किसी भी अंक से गुणा करने पर '0' प्राप्त होता है। अतः भाग संभव नहीं है।

प्रयत्न कीजिए।

यदि हम पूर्णांकों के समुच्चय से शून्य निकाल दें तो क्या यह भाग के सापेक्ष संवृत है?

इसी तरह प्राकृतिक संख्याओं के लिए भी जाँच कीजिए।

प्रयत्न कीजिए।
तालिका के खाली स्थानों को भरिए।

संख्याएँ	अंतर्गत संवृत है			
	योग	व्यवकलन	गुणन	भाग
प्राकृतिक संख्या	हाँ	—	—	—
पूर्ण संख्याएँ	—	—	—	नहीं
पूर्णांक	—	हाँ	—	—
परिमेय संख्याएँ	—	—	हाँ	—

1.2.2. क्रमविनमेय गुण (Commutative Property):

आइए, पूर्ण संख्याओं और पूर्णांकों दोनों के लिए हम अलग-अलग संक्रियाओं के साथ क्रमविनिमेय गुणों को हम पुनः स्मरण करते हैं।

निम्न तालिका पूर्ण कीजिए।

(i) पूर्ण संख्याएँ

> क्रमविनिमेयता वह गुण है जिसमें यदि संख्याओं की द्विधारी प्रक्रिया में, संख्याओं का क्रम बदल दिया जाये तो परिणाम पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता।
> जैसे- $a + b = b + a$
> $a \times b = b \times a$
> यहाँ द्विधारी प्रक्रिया, चारों मूल संक्रियाओं में से कोई भी एक हो सकती है, अर्थात, $+, -, \times, \div$

संक्रियाएँ	उदाहरण	टिप्पणी
योग	2, 3 पूर्ण संख्याएँ है। $2+3 = 5$ और $3 + 2 = 5$ $\therefore 2 + 3 = 3 + 2$	W में योग क्रमविनिमेय गुण का पालन करता है।
व्यवकलन	क्या $3 - 2$ और $2 - 3$ समान हैं?	क्रमविनिमेय गुण का पालन नहीं करता।
गुणन	------	------
भाग	$4 \div 2 = ?$ $2 \div 4 = ?$ Is $4 \div 2 = 2 \div 4$?	-------

(ii) पूर्णांक

संक्रिया	उदाहरण	टिप्पणी
योग	---	पूर्णांकों में योग क्रमविनिमेय है।
व्यवकलन	2, 3 पूर्णांक हैं 2 – (3) = ? (3) – 2 = ? क्या 2 – (3) = (3) – 2 = ?	....
गुणन	... ...	... ...
भाग	... ...	पूर्णांकों में भाग क्रमविनिमेय नहीं है।

(iii) परिमेय संख्याएँ

(a) योग

दो परिमेय संख्याएँ $\frac{5}{2}, \frac{-3}{4}$ लीजिए। इन्हें जोड़ दीजिए।

$$\frac{5}{2} + \frac{(-3)}{4} = \frac{2\times5+1\times(-3)}{4} = \frac{10-3}{4} = \frac{7}{4}$$

और $\frac{(-3)}{4} + \frac{5}{2} = \frac{1\times(-3)+2\times5}{4} = \frac{-3+10}{4} = \frac{7}{4}$

तो $\frac{5}{2} + \left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{-3}{4} + \frac{5}{2}$

अब इस गुण को परिमेय संख्याओं के कुछ और युग्मों के लिए जाँच कीजिए।

मान लीजिए $\frac{1}{2} + \frac{5}{7}$ और $\frac{5}{7} + \frac{1}{2}$. क्या $\frac{1}{2} + \frac{5}{7} = \frac{5}{7} + \frac{1}{2}$?

क्या $\frac{-2}{3} + \left(\frac{-4}{5}\right) = \frac{(-4)}{5} + \left(\frac{-2}{3}\right)$?

क्या आप परिमेय संख्याओं के कोई ऐसे युग्म बता सकते हैं जिनपर यह नियम गलत हो?

हम कह सकते हैं कि किन्हीं a और b परिमेय संख्याओं के लिए $a + b = b + a$

इस प्रकार परिमेय संख्याओं के समुच्चय में योग क्रमविनिमेय रहता है।

$\therefore \ \forall\, a, b \in Q, a + b = b + a$

(b) **व्यवकलन :** दो परिमेय संख्याएँ $\frac{2}{3}$ और $\frac{7}{8}$ लीजिए।

$\frac{2}{3} - \frac{7}{8} = \frac{16-21}{24} = \frac{-5}{24}$ और $\frac{7}{8} - \frac{2}{3} = \frac{21-16}{24} = \frac{5}{24}$

इसलिए $\frac{2}{3} - \frac{7}{8} \neq \frac{7}{8} - \frac{2}{3}$

इनकी जाँच कीजिए।

क्या $2 - \frac{5}{4} = \frac{5}{4} - 2$?

क्या $\frac{1}{2} - \frac{3}{5} = \frac{3}{5} - \frac{1}{2}$?

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि परिमेय संख्याओं के समुच्चय में गटाना क्रमविनिमेय नहीं है।

$a - b \neq b - a$ किन्हीं दो परिमेय संख्याओं a और b के लिए।

(c) **गुणन :** दो परिमेय संख्याएँ 2 और $-\frac{5}{7}$ लीजिए।

$2 \times \frac{-5}{7} = \frac{-10}{7}$; $\frac{-5}{7} \times 2 = \frac{-10}{7}$ अत: $2 \times \frac{-5}{7} = \frac{-5}{7} \times 2$

क्या $\frac{-1}{2} \times \left(\frac{-3}{4}\right) = \left(\frac{-3}{4}\right) \times \left(\frac{-1}{2}\right)$?

इन्हें कुछ और परिमेय संख्याओं के लिए जाँच कीजिए।

हम निष्कर्ष निकालते हैं कि परिमेय संख्याओं के अंतर्गत गुणन क्रमविनिमेय है।

अर्थात $a \times b = b \times a$ किन्हीं दो परिमेय संख्याओं a और b के लिए।

अर्थात $\forall\, a, b \in Q,\ a \times b = b \times a$

(d) **भाग**

क्या $\frac{7}{3} \div \frac{14}{9} = \frac{14}{9} \div \frac{7}{3}$?

$\frac{7}{3} \div \frac{14}{9} = \frac{\cancel{7}^{1}}{\cancel{3}_{1}} x \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{14}_{2}} = \frac{3}{2}$ और $\frac{14}{9} \div \frac{7}{3} = \frac{\cancel{14}^{2}}{\cancel{9}_{3}} \times \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{7}_{1}} = \frac{2}{3}$

$\frac{7}{3} \div \frac{14}{9} \neq \frac{14}{9} \div \frac{7}{3}$

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि परिमेय संख्याओं के समुच्चय में भाग क्रमविनिमेय नहीं हैं।

प्रयत्न कीजिए।

यह तालिका पूर्ण कीजिए।

संख्याएँ	क्रमविनिमेयता के अंतर्गत			
	योग	व्यवकलन	गुणन	भाग
प्राकृतिक संख्याएँ	हाँ	नहीं	हाँ	————
पूर्ण संख्याएँ	————	————	————	नहीं
पूर्णांक	————	————	————	————
परिमेय संख्याएँ	————	————	————	नहीं

1.2.3 साहचर्य गुण (Associative Property)

साहचर्य गुण यह दर्शाता है की यदि आपको तीन संख्याओं को जोडना हो तो, आप पहली दो संख्याओं को जोडकर उसके योगफल में तिसरी संख्या जोड सकते है या फिर पहले आप दुसरी तथा तिसरी संख्या को जोडकर उसके योगफल से पहली संख्या को जोडेंगे तो परिणाम एक जैसे ही प्राप्त होंगे। $(3+2)+5$ तथा $3+(2+5)$.

चार संक्रियाएँ, अर्थात, योग, घटाना, गुणा और भाग के सापेक्ष पूर्ण संख्याओं को साहचर्य गुण के बारे में याद कीजिए।

(i) पूर्ण संख्याएँ

आवश्यक उदाहरण और टिप्पणियों द्वारा तालिका पूर्ण कीजिए।

संक्रिया	पूर्ण संख्याओं के उदाहरण	टिप्पणी
योग	क्या $2+(3+0)=(2+3)+0$? $2+(3+0)=2+3=5$ $(2+3)+0=5+0=5$ $\Rightarrow 2+(3+0)=(2+3)+0$ $a+(b+c)=(a+b)+c$ किन्हीं a, b, c पूर्ण संख्याओं के लिए	— — — — — —
व्यवकलन	$(2-3)-2=$? $2-(3-2)=$? Is $(2-3)-2 = 2-(3-2)$?	व्यवकलन साहचर्य नहीं है।
गुणन	— — — — — — — — — — — —	गुणन साहचर्य है।
भाग	क्या $2\div(3\div5)=(2\div3)\div5$? $2\div(3\div5)=2\div\frac{3}{5}=2\times\frac{5}{3}=\frac{10}{3}$ $(2\div3)\div5=\frac{2}{3}\div5=\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$ $2\div(3\div5)\neq(2\div3)\div5$	भाग साहचर्य नहीं है.

(ii) पूर्णांक

चार संक्रियाओं के सापेक्ष पूर्णांकों की साहचर्यता को स्मरण कीजिए।

निम्न तालिका आवश्यक टिप्पणियों के साथ पूर्ण कीजिए।

संक्रिया	पूर्णांक उदाहरण के साथ	टिप्पणी
योग	क्या $2 + [(-3) + 5)] = [(2 + (-3)] + 5$? $2+[(-3)+5]=2+[-3+5]=2+2=4$ $[2+(-3)]+5=[2-3]+5=-1+5=4$ किन्हीं a, b और c तीन पूर्णांकों के लिए $a + (b + c) = (a + b) + c$	— — —— —
व्यवकलन	क्या $6 - (9 - 5) = (6 - 9) - 5$?	— — —— —
गुणन	क्या $2\times[7\times(-3)] = (2\times 7)\times(-3)$?	— — —— —
भाग	$10 \div [2\div(-5)] = [10 \div 2]\div(-5)$? $10 \div [2\div(-5)] = 10\div\frac{-2}{5} = 10\times\frac{-5}{2} = -25$ अब $(10\div 2)\div(-5) = \frac{10}{2}\div -5 = 5\div -5 = \frac{5}{-5} = -1$ इस प्रकार $10 \div [2\div(-5)] \neq [10\div 2]\div(-5)$	— — —— —

(iii) परिमेय संख्याएँ - साहचर्यता

(a) योग

मान लीजिए तीन परिमेय संख्याएँ $\frac{2}{7}, 5, \frac{1}{2}$ हैं। इनकी जाँच कीजिए कि

$$\frac{2}{7}+\left[5+\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\left[\left(\frac{2}{7}+5\right)\right]+\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{L.H.S.} = \frac{2}{7}+\left[5+\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{2}{7}+\left[5+\frac{1}{2}\right]=\frac{2}{7}+\left[\frac{10+1}{2}\right]=\frac{4+77}{14}=\frac{81}{14}$$

$$\text{R.H.S.} = \left[\left(\frac{2}{7}+5\right)\right]+\left(\frac{1}{2}\right)=\left[\left(\frac{2+35}{7}\right)\right]+\frac{1}{2}=\frac{37}{7}+\frac{1}{2}=\frac{74+7}{14}=\frac{81}{14}$$

$$\text{L.H.S.} = \text{R.H.S.}$$

ज्ञात कीजिए। $\frac{1}{2}+\left[\frac{3}{7}+\frac{4}{3}\right]$ और $\left[\frac{1}{2}+\frac{3}{7}\right]+\left(\frac{4}{3}\right)$

क्या दोनों योग समान हैं?

कुछ अन्य परिमेय संख्याओं को लेकर इनकी साहचर्यता की जाँच कीजिए।

हमें प्राप्त हुआ कि परिमेय संख्याएँ योग के अंतर्गत साहचर्य नियम का पालन करती हैं।

$a+(b+c) = (a+b)+c$ किन्हीं तीन परिमेय संख्याओं a, b और c के लिए।

अर्थात. $\forall$ a, b, c $\in$ Q, $a+(b+c)=(a+b)+c$

(b) व्यवकलन

तीन परिमेय संख्याएँ $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ और $\frac{-5}{4}$ लीजिए।

जाँच कीजिए $\frac{1}{2}-\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{-5}{4}\right)\right]=\left[\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right]-\left(\frac{-5}{4}\right)$

$$\text{L.H.S.} = \frac{1}{2}-\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{-5}{4}\right)\right] \quad = \frac{1}{2}-\left[\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\right]=\frac{1}{2}-\left[\frac{8}{4}\right]$$

$$=\frac{1}{2}-2=\frac{1-4}{2}=\frac{-3}{2}$$

$$\text{R.H.S.} = \left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{-5}{4}\right) \quad = \left(\frac{1\times2-3}{4}\right)+\frac{5}{4}=\left(\frac{-1}{4}\right)+\frac{5}{4}$$

$$=\frac{-1+5}{4}=\frac{4}{4}=1$$

$$\therefore \frac{1}{2}-\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{-5}{4}\right)\right] \neq \left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{-5}{4}\right)$$

$$\text{L.H.S.} \neq \text{R.H.S.}$$

हमने ज्ञात किया कि परिमेय संख्याओं के समुच्चय में व्यवकलन साहचर्य नियम का पालन नहीं करता है। अतः $a-(b-c) \neq (a-b)-c$ किन्हीं तीन परिमेय संख्याओं a, b, c के लिए।

(c) गुणन

तीन परिमेय संख्याएँ लीजिए $\frac{2}{3}, \frac{4}{7}, \frac{-5}{7}$

क्या $\frac{2}{3}\times\left[\frac{4}{7}\times\left(\frac{-5}{7}\right)\right]=\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{7}\right)\times\left(\frac{-5}{7}\right)$?

$$\text{LHS} = \frac{2}{3}\times\left[\frac{4}{7}\times\left(\frac{-5}{7}\right)\right] = \frac{2}{3}\left[\frac{-20}{49}\right]=\frac{-40}{147}$$

$$\text{R.H.S.} = \left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{7}\right)\times\left(\frac{-5}{7}\right) = \left(\frac{8}{21}\right)\times\left(\frac{-5}{7}\right) = \frac{-40}{147}$$

L.H.S. = R.H.S.

इनकी जाँच कीजिए।

ज्ञात कीजिए। $2\times\left(\frac{1}{2}\times 3\right)$ और $\left(2\times\frac{1}{2}\right)\times 3$

क्या $2\times\left(\frac{1}{2}\times 3\right) = \left(2\times\frac{1}{2}\right)\times 3$?

ज्ञात कीजिए $\frac{5}{3}\times\left(\frac{3}{7}\times\frac{7}{5}\right)$ और $\left(\frac{5}{3}\times\frac{3}{7}\right)\times\frac{7}{5}$

क्या $\frac{5}{3}\times\left(\frac{3}{7}\times\frac{7}{5}\right) = \left(\frac{5}{3}\times\frac{3}{7}\right)\times\frac{7}{5}$?

हम ऊपर की सभी स्थितियों में पाते हैं कि L.H.S. = R.H.S.

इस प्रकार परिमेय संख्याओं में गुणा साहचर्य नियम का पालन करता है।

$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ किन्हीं a, b, c परिमेय संख्याओं के लिए

अर्थात, $\forall\, a, b, c \in Q,\ \ a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

(d) भाग

कोई तीन परिमेय संख्याएँ लीजिए जैसे- $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ और $\frac{1}{7}$

क्या $\frac{2}{3}\div\left(\frac{3}{4}\div\frac{1}{7}\right) = \left(\frac{2}{3}\div\frac{3}{4}\right)\div\frac{1}{7}$?

$$\text{L.H.S.} = \frac{2}{3}\div\left(\frac{3}{4}\div\frac{1}{7}\right) = \frac{2}{3}\div\left(\frac{3}{4}\times\frac{7}{1}\right) = \frac{2}{3}\div\frac{21}{4} = \frac{2}{3}\times\frac{4}{21} = \frac{8}{63}$$

$$\text{R.H.S.} = \left(\frac{2}{3}\div\frac{3}{4}\right)\div\frac{1}{7} = \left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)\div\frac{1}{7} = \left(\frac{8}{9}\right)\div\frac{1}{7} = \frac{8}{9}\times\frac{7}{1} = \frac{56}{9}$$

$$\frac{2}{3}\div\left(\frac{3}{4}\div\frac{1}{7}\right) \neq \left(\frac{2}{3}\div\frac{3}{4}\right)\div\frac{1}{7}$$

L.H.S. ≠ R.H.S.

अतः $a \div (b \div c) \neq (a \div b) \div c$ किन्हीं तीन परिमेय संख्याओं a, b, c के लिए

इसलिए, परिमेय संख्याओं में भाग साहचर्य नियम का पालन नहीं करता।

इसे कीजिए।

इस तालिका को पूर्ण कीजिए।

संख्याएँ	साहचर्य के अंतर्गत			
	योग	व्यवकलन	गुणन	भाग
प्राकृतिक संख्याएँ	हाँ	नहीं	.....	.....
पूर्ण संख्याएँ	.....	.....	.....	नहीं
पूर्णांक	.....	नहीं	हाँ	.....
परिमेय संख्याएँ	.....	.....	.....	.....

1.2.4 शून्य की भूमिका

क्या आप कोई ऐसी संख्या बता सकते हैं, जिसे किसी संख्या में जोड़ने पर वही संख्या प्राप्त होती है? जब **'0'** किसी भी परिमेय संख्या में जोड़ा जाता है तो पुनः वही परिमेय संख्या प्राप्त होती है। उदाहरण के लिए

$1+0=1$ और $0+1=1$

$-2+0=-2$ और $0+(-2)=-2$

$\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$ और $0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

इस कारण हम '0' को योग तत्समक घटक या योज्य तत्समक कहते हैं। इस गुण का सार नीचे प्रस्तुत किया गया है।

यदि **a** कोई परिमेय संख्या का प्रतिनिधित्व करता है तो $a+0=a$ और $0+a=a$

क्या प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय में योज्य तत्समक है?

1.2.5 एक (1) की भूमिका

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

$3\times\square=3$ और $\square\times3=3$

$-2\times\square=-2$ और $\square\times-2=-2$

$\frac{7}{8}\times\square=\frac{7}{8}$ और $\square\times\frac{7}{8}=\frac{7}{8}$

आपने ऊपर के गुणनफल में क्या कुछ विशेष देखा?

अतः हम कह सकते हैं कि कोई भी परिमेय संख्या '1' से गुणा की जाये तो गुणनफल पुनः वही परिमेय संख्या प्राप्त होगी।

हम कह सकते हैं कि '1' परिमेय संख्याओं के लिए गुणनात्मक तत्समक है।

पूर्णांक और पूर्ण संख्याओं के लिए गुणनात्मक तत्समक क्या है?

उदाहरण के लिए जब $\frac{15}{50}$ को सरल रूप में लिखने के लिए हम निम्न प्रकार से करते हैं।

$$\frac{15}{50} = \frac{3\times 5}{10\times 5} = \frac{3}{10}\times\frac{5}{5} = \frac{3}{10}\times 1 = \frac{3}{10}$$

जहाँ हम लिखते हैं कि $\frac{3}{10}\times 1 = \frac{3}{10}$. यहाँ हमने गुणनफल के तत्समक गुण का उपयोग किया है।

1.2.6 विलोम का अस्तित्व

(i) योगात्मक विलोम (Additive Inverse)

$3 + (-3) = 0$ और $-3 + 3 = 0$

$-5 + 5 = 0$ और $5 + (-5) =$ ______

$\frac{2}{3} + ? = 0$ और ____ $+ \frac{2}{3} =$ ______?

$\left(-\frac{1}{2}\right) + ? = 0$ और ______? $+ \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

यहाँ -3 और 3 एक दूसरे के योगात्मक विलोम कहलाते हैं, क्योंकि इनको जोड़ने पर हमें योग '0' प्राप्त होता है। कोई दो योगात्मक इकाई संख्याएँ जिनका योग '0' हो, एक दूसरे के योगात्मक विलोम कहलाते हैं। सामान्यतः यदि **a** कोई परिमेय संख्या है तो $\mathbf{a} + (\mathbf{-a}) = \mathbf{0}$ और $(\mathbf{-a}) + \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

तो 'a', '–a' एक दूसरे के योगात्मक विलोम हैं।

0 का योगात्मक विलोम 0 ही रहता है क्योंकि $0 + 0 = 0$.

(ii) गुणात्मक विलोम (Multiplecative Inverse)

परिमेय संख्या $\frac{2}{7}$ किस संख्या से गुणा किया जाये कि गुणनफल 1 प्राप्त हो?

हम देते हैं $\frac{2}{7}\times\frac{7}{2} = 1$ और $\frac{7}{2}\times\frac{2}{7} = 1$

नीचे दिए खाली डिब्बे भरिए।

$2 \times \square = 1$ और $\square \times 2 = 1$

$-5 \times \square = 1$ और $\square \times 5 = 1$

$\frac{-17}{19} \times \square = 1$ और $\square \times \frac{-17}{19} = 1$

$1 \times ? = 1$

$-1 \times ? = 1$

कोई दो संख्याएँ जिनका गुणनफल '1' हो, वे एक दूसरे के गुणात्मक विलोम कहलाते हैं।

उदाहरणतया, $4 \times \frac{1}{4} = 1$ और $\frac{1}{4} \times 4 = 1$, अतः संख्या 4 और $\frac{1}{4}$ एक दूसरे के गुणात्मक विलोम (या प्रतिलोम) हैं।

हम कह सकते हैं कि एक परिमेय संख्या $\frac{c}{d}$, दूसरी परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ का गुणात्मक विलोम कहलाती है यदि $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = 1$

प्रयत्न कीजिए :

वितरण नियम का उपयोग करते हुए ज्ञात कीजिए।

(1) $\left\{\frac{7}{5} \times \left(\frac{-3}{10}\right)\right\} + \left\{\frac{7}{5} \times \frac{9}{10}\right\}$

(2) $\left\{\frac{9}{16} \times 3\right\} + \left\{\frac{9}{16} \times -19\right\}$

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए।

1. परिमेय संख्याओं के लिए योग के साथ एक गुण सही हो तो क्या वह पूर्णांकों के लिए भी सही होगा? और पूर्ण संख्याओं के लिए? कौनसा सही होगा? कौनसा सही नहीं होगा?
2. ऐसी संख्याएँ लिखिए जिनके गुणात्मक विलोम, वही संख्याएँ हों।
3. क्या आप '0' (zero) का गुणात्मक प्रतिलोम बता सकते हैं? क्या कोई परिमेय संख्या ऐसी है जिसे '0' से गुणा करने पर '1' प्राप्त हो?

$\square \times 0 = 1$ और $0 \times \square = 1$

1.3 योग पर गुणा का वितरण (Distributive)

कोई तीन परिमेय संख्याएँ $\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ लीजिए।

जाँच कीजिए कि $\frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right)$

$$\text{L.H.S} = \frac{2}{5}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right) = \frac{2}{5}\times\left(\frac{2+3}{4}\right) = \frac{2}{5}\times\frac{5}{4} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$\text{R.H.S} = \frac{2}{5}\times\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{5}\times\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{2}{10}+\frac{6}{20} = \frac{4+6}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$\text{L.H.S} = \text{R.H.S}$$

अतः $$\frac{2}{5}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{4}\right)$$

यह गुण योग पर गुणा का वितरण कहलाता है।

अब निम्न की जाँच कीजिए।

क्या $\frac{2}{5}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right) = \frac{2}{5}\times\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{2}{5}\times\left(\frac{3}{4}\right)$

आपने क्या ध्यान दिया? क्या L.H.S. = R.H.S.?

यह गुण व्यवकलन पर गुणा वितरण नियम कहलाता है।

कुछ और परिमे संख्याओं के युग्मों को लीजिए और वितरण नियम की जाँच कीजिए।

सभी परिमेय संख्याओं a, b और c के लिए

हम कह सकते हैं

$a\,(b + c) = ab + ac$

$a\,(b - c) = ab - ac$

इसे कीजिए।

तालिका की पूर्ति कीजिए।

संख्याएँ	योगात्मक गुण				
	संवृत	क्रमविनिमेय	साहचर्य	इकाई घटक का अस्तित्व	विलोम घटक का अस्तित्व
परिमेय संख्याएँ	हाँ	——	——	——	——
पूर्णांक	हाँ	——	——	——	——
पूर्ण संख्याएँ	——	——	——	हाँ	नहीं
प्राकृतिक संख्याएँ	हाँ	——	——	——	——

तालिका पूर्ण कीजिए।					
संख्याएँ	गुणात्मक गुण				
	संवृत	क्रमविनिमेय	साहचर्य	इकाई घटक का अस्तित्व	विलोम घटक का अस्तित्व
परिमेय संख्याएँ	हाँ	——	——	——	——
पूर्णांक	——	हाँ	——	——	——
पूर्ण संख्याएँ	——	——	हाँ	——	——
प्राकृतिक संख्याएँ	——	——	——	हाँ	——

उदाहरण 1. सरल कीजिए $\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\left(\frac{-6}{5}\right)+\left(\frac{-13}{7}\right)$

हल : दिए गए भिन्नों में से सदृश भिन्नों को एक साथ रखते हुए पुनर्व्यवस्थापन कीजिए।

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\left(\frac{-6}{5}\right)+\left(\frac{-13}{7}\right)=\frac{2}{5}+\frac{3}{7}-\frac{6}{5}-\frac{13}{7}$$

$$=\left(\frac{2}{5}-\frac{6}{5}\right)+\left(\frac{3}{7}-\frac{13}{7}\right) \quad \text{(योग के क्रमविनिमेय नियम द्वारा)}$$

$$=\frac{2-6}{5}+\frac{3-13}{7}$$

$$=\frac{-4}{5}+\frac{-10}{7}=\frac{-4}{5}-\frac{10}{7}$$

$$=\frac{-4\times 7-10\times 5}{35}=\frac{-28-50}{35}=\frac{-78}{35}$$

उदाहरण 2: निम्न परिमेय संख्याओं के प्रत्येक के योगात्मक विलोम लिखिए।

(i) $\frac{2}{7}$ (ii) $\frac{-11}{5}$ (iii) $\frac{7}{-13}$ (iv) $\frac{-2}{-3}$

हल : (i) $\frac{2}{7}$ का योगात्मक प्रतिलोम $\frac{-2}{7}$ है।

क्योंकि $\frac{2}{7}+\left(\frac{-2}{7}\right)=\frac{2-2}{7}=0$

(ii) $\frac{-11}{5}$ का योगात्मक विलोम $-\left(\frac{-11}{5}\right) = \frac{11}{5}$

(iii) $\frac{7}{-13}$ का योगात्मक विलोम $-\left(\frac{7}{-13}\right) = \frac{-7}{-13} = \frac{7}{13}$

(iv) $\frac{-2}{-3}$ का योगात्मक विलोम $-\left(\frac{\cancel{-}2}{\cancel{-}3}\right) = -\frac{2}{3}$

उदाहरण 3 : ज्ञात कीजिए $\frac{2}{5} \times \frac{-1}{9} + \frac{23}{180} - \frac{1}{9} \times \frac{3}{4}$

हल : $\frac{2}{5} \times \frac{-1}{9} + \frac{23}{180} - \frac{1}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \times \frac{-1}{9} - \frac{1}{9} \times \frac{3}{4} + \frac{23}{180}$

(योग के क्रमविनिमेय नियम द्वारा)

$$= \frac{2}{5} \times \left(\frac{-1}{9}\right) + \left(\frac{-1}{9}\right) \times \frac{3}{4} + \frac{23}{180}$$

$$= \frac{-1}{9}\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{4}\right) + \frac{23}{180}$$ (वितरण नियम द्वारा)

$$= -\frac{1}{9}\left(\frac{8+15}{20}\right) + \frac{23}{180}$$

$$= -\frac{1}{9}\left(\frac{23}{20}\right) + \frac{23}{180} = \frac{-23}{180} + \frac{23}{180} = 0$$ (योगात्मक विलोम नियम द्वारा)

उदाहरण 4: $\frac{-9}{2}, \frac{5}{18}$ के प्रतिलोम का गुणा कीजिए और गुणनफल को $\left(\frac{-4}{5}\right)$ के योगात्मक विलोम के साथ जोड़िए। उत्तर क्या आया?

हल : $\frac{-9}{2}$ का प्रतिलोम $\frac{-2}{9}$ है।

$\frac{5}{18}$ का प्रतिलोम $\frac{18}{5}$ है।

प्रतिलोमों का गुणनफल $= \frac{-2}{\cancel{9}_{1}} \times \frac{\cancel{18}^{2}}{5} = \frac{-4}{5}$

$\left(\frac{-4}{5}\right)$ का योगात्मक प्रतिलोम $\frac{4}{5}$ है।

तो गुणनफल + योगात्मक प्रतिलोम = $\frac{-4}{5}+\frac{4}{5}=0$ (योगात्म विलोम गुण)

अभ्यास 1.1

1. निम्न उदाहरणों में बताए गुणों का नाम दीजिए।

(i) $\frac{8}{5}+0=\frac{8}{5}=0+\frac{8}{5}$ (ii) $2\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{3}{5}\right)+2\left(\frac{1}{2}\right)$

(iii) $\frac{3}{7}\times 1=\frac{3}{7}=1\times\frac{3}{7}$ (iv) $\left(\frac{-2}{5}\right)\times 1=\frac{-2}{5}=1\times\left(\frac{-2}{5}\right)$

(v) $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$ (vi) $\frac{5}{2}\times\frac{3}{7}=\frac{15}{14}$

(vii) $7a+(-7a)=0$ (viii) $x\times\frac{1}{x}=1 \; (x\neq 0)$

(ix) $(2\times x)+(2\times 6)=2\times(x+6)$

2. इन संख्याओं के योगात्मक तथा गुणात्मक प्रतिलोम लिखिए।

(i) $\frac{-3}{5}$ (ii) 1 (iii) 0 (iv) $\frac{7}{9}$ (v) -1

3. खाली स्थान भरिए।

(i) $\left(\frac{-1}{17}\right)+(\_\_\_\_\_)=\left(\frac{-12}{5}\right)+\left(\frac{-1}{17}\right)$ (ii) $\frac{-2}{3}+\_\_\_\_\_\ \frac{-2}{3}$

(iii) $1\times\_\_\_\_\_=\frac{9}{11}$ (iv) $-12+\left(\frac{5}{6}+\frac{6}{7}\right)=\left(-12+\frac{5}{6}\right)+(\_\_\_\_)$

(v) $(\_\_\_\_\_)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{4}\times\_\_\_\_\right)$

(vi) $\frac{-16}{7}+\_\_\_\_\_=\frac{-16}{7}$

4. $\frac{2}{11}$ को $\frac{-5}{14}$ के प्रतिलोम द्वारा गुणा कीजिए।

5. $\frac{2}{5}\times\left(5\times\frac{7}{6}\right)+\frac{1}{3}\times\left(3\times\frac{4}{11}\right)$ की गणना में कौनसे गुणों का उपयोग किया जाता है?

6. निम्न की जाँच कीजिए। तथा उपयोग में लाए गए गुण को लिखिए।

$$\left(\frac{5}{4}+\frac{-1}{2}\right)+\frac{-3}{2}=\frac{5}{4}+\left(\frac{-1}{2}+\frac{-3}{2}\right)$$

7. $\frac{3}{5}+\frac{7}{3}+\left(\frac{-2}{5}\right)+\left(\frac{-2}{3}\right)$ का पुनर्व्यवस्थापन करने के बाद मूल्यांकन कीजिए।

8. घटाइए

(i) $\frac{1}{3}$ से $\frac{3}{4}$ (ii) 2 से $\frac{-32}{13}$ (iii) $\frac{-4}{7}$ से -7

9. $\frac{-5}{8}$ में कौन सी संख्या जोड़ें कि उत्तर $\frac{-3}{2}$ प्राप्त हो?

10. दो परिमेय संख्याओं का योग 8 है। यदि एक संख्या $\frac{-5}{6}$ हो तो दूसरी संख्या ज्ञात कीजिए।

11. क्या परिमेय संख्याओं में व्यवकलन साहचर्य नियम का पालन करते हैं? उदाहरण सहित स्पष्ट कीजिए।

12. जाँच कीजिए कि $-(-x)=x$ के लिए

(i) $x=\frac{2}{15}$ (ii) $x=\frac{-13}{17}$

13. लिखिए-

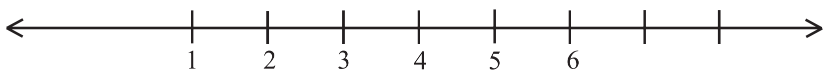
(i) संख्याओं का समुच्चय जिसमें योगात्मक इकाई घटक नहीं है।

(ii) वह परिमेय संख्या जिसका कोई प्रतिलोम नहीं है।

(iii) ऋणात्मक परिमेय संख्या का प्रतिलोम

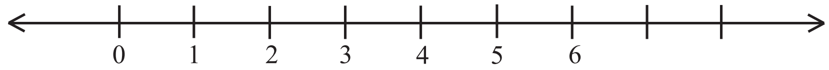
1.4 संख्यारेखा पर परिमेय संख्याओं का चित्रण

गायत्री ने एक संख्यारेखा खींची और उसपर संख्याएँ अंकित कीं।

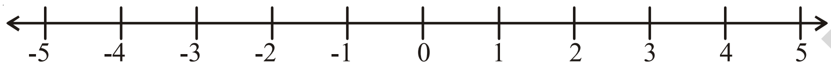


रेखा पर कौनसी संख्याओं का सम्मुचय चिह्नित किया गया है?

सुजाता ने कहा- “वे प्राकृतिक संख्याएँ हैं”. परमेश ने कहा- “वे परिमेय संख्याएँ हैं” आस किससे सहमत हैं ?



रेखा पर कौन सी संख्याओं का समुच्चय चिह्नित है? वे पूर्ण संख्याएँ हैं या परिमेय संख्याएँ?



रेखा पर कौन सी संख्याओं का समुच्चय चिह्नित है?

क्या आप -5 और 3 के बीच की कोई दो संख्याएँ संख्यारेखा पर दर्शा सकते हैं।

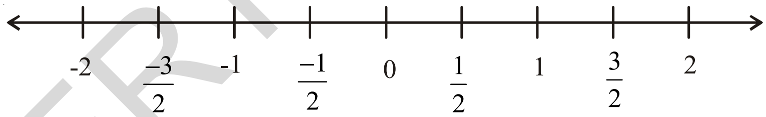
क्या आप उपर्युक्त रेखा पर पूर्णांक 0 और 1 या -1 और 0 के बीच की कोई संख्या देख सकते हो?

0 और 1 के बीच में संख्या $\frac{1}{2}$ है।

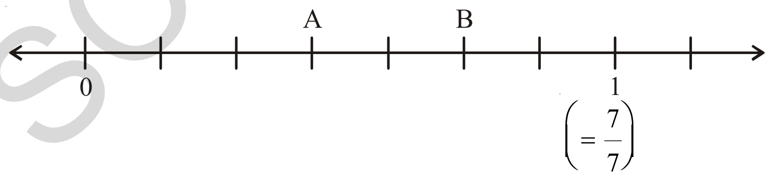
1 और 2 के बीच $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, 0 और -1 के बीच $-\frac{1}{2}$ है।

-1 और -2 के बीच $-1\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$ है।

ये परिमेय संख्याएँ संख्या रेखा पर निम्न प्रकार से दर्शाई जा सकती हैं-



उदाहरण 5 : नीचे दी गई संख्यारेखा पर चिह्नित A और B से दिखाई गई परिमेय संख्याओं को पहचानिए।

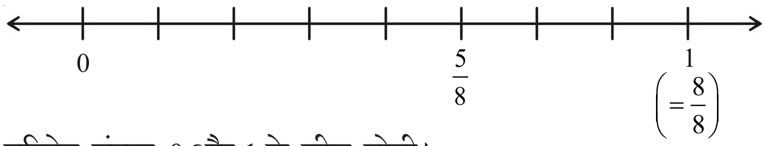


कोई भी परिमेय संख्या, संख्या रेखा पर दर्शा सकते हैं। ध्यान रहे कि परिमेय संख्या में हर, प्रत्येक इकाई को समान भागों में विभाजित करने वाली संख्या को दर्शाता है। अंश, इन भागों में से कितने भाग लिये गये हैं, दर्शाता है।

हल : यहाँ एक इकाई, 0 से 1 को 7 समान भागों में बाँटा गया। 7 भागों में तीसरे भाग को A से प्रदर्शित करते हैं। इसलिए, A प्रदर्शित करता है $\frac{3}{7}$ को और B प्रदर्शित करता है $\frac{5}{7}$ को।

उदाहरण 6: संख्यारेखा पर $\frac{5}{8}$ दर्शाइए।

हल :



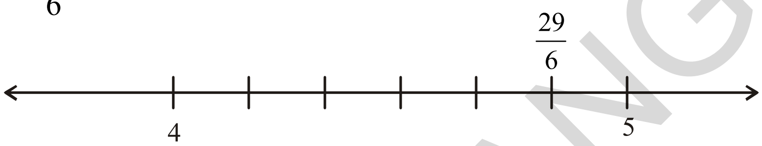
$\frac{5}{8}$ परिमेय संख्या 0 और 1 के बीच होगी।

इसलिए 0 और 1 के बीच की संख्यारेखा को 8 (हर) समान भागों में विभाजित कीजिए।

0 से नापते हुए 5वें भाग (अंश) को $\frac{5}{8}$ से चिह्नित कीजिए। यही परिमेय संख्या $\frac{5}{8}$ है।

उदाहरण 7: $\frac{29}{6}$ को संख्यारेखा पर दर्शाइए।

हल :



$\frac{29}{6} = 4\frac{5}{6} = 4+\frac{5}{6}$. यह संख्यारेखा पर 4 और 5 के बीच रहता है।

4 और 5 के बीच को 6 (हर) समान भागों में विभाजित कीजिए।

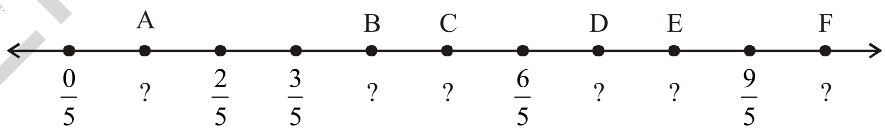
4 से नापते हुए 5वें भाग (परिमेय भाग का अंश) को चिह्नित कीजिए।

यही $\frac{29}{6}$ का स्थान है।

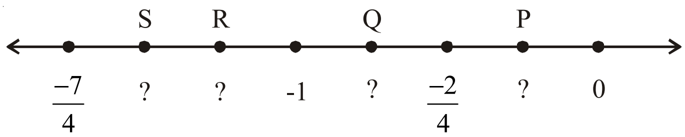
प्रयत्न कीजिए।

संख्यारेखा पर अक्षरों से चिह्नित बिंदुओं के लिए परिमेय संख्याएँ लिखिए।

(i)



(ii)



इसे कीजिए।

(i) $-\frac{13}{5}$ को संख्यारेखा पर दर्शाइए।

1.5 दो परिमेय संख्याओं के बीच परिमेय संख्या

निम्न को ध्यान से देखिए।

5 और 1 के बीच प्राकृतिक संख्याएँ 4, 3, 2 हैं।

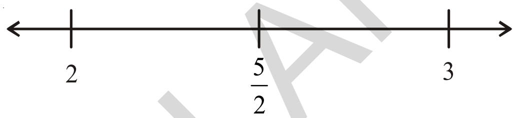
क्या कोई प्राकृतिक संख्या 1 और 2 के बीच है?

–4 और 3 के बीच पूर्णांक –3, –2, –1, 0, 1, 2 हैं। क्या –2 और –1 के बीच कोई पूर्णांक है? क्या आप इसे ज्ञात कर सकते हैं? अतः दो क्रमिक पूर्णांकों के बीच कोई भी पूर्णांक नहीं रहता है।

किंतु दो क्रमिक पूर्णांकों के बीच हम परिमेय संख्या लिख सकते हैं।

आइए अब 2 और 3 के बीच कोई परिमेय संख्या लें।

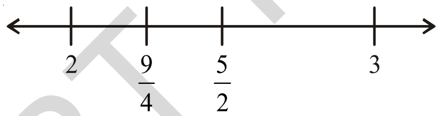
हम जानते हैं कि a और b दो परिमेय संख्याएँ हैं तब $\frac{a+b}{2}$ (यह a और b का माध्य भी कहलाता है) इनके बीच की परिमेय संख्या है। इसलिए $\frac{2+3}{2}=\frac{5}{2}$ परिमेय संख्या है जो 2 और 3 के ठीक बीच में स्थित है।



इस प्रकार $2 < \frac{5}{2} < 3.$

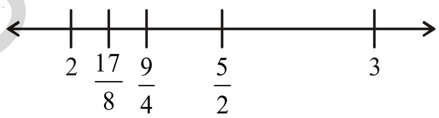
अब 2 और $\frac{5}{2}$ के बीच की परिमेय संख्या $\frac{2+\frac{5}{2}}{2} = \frac{\frac{9}{2}}{2} = \frac{9}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{9}{4}.$ है।

इस प्रकार



$$2 < \frac{9}{4} < \frac{5}{2} < 3$$

पुनः 2 और $\frac{9}{4}$ का माध्य होगा- $\frac{2+\frac{9}{4}}{2} = \frac{\frac{17}{4}}{2} = \frac{17}{8}$



इसलिए $2 < \frac{17}{8} < \frac{9}{4} < \frac{5}{2} < 3$

इस प्रकार दो संख्याओं के बीच हम कितने भी अंतर्निर्विष्ट परिमेय संख्याएँ प्राप्त कर सकते हैं। वास्तव में दो परिमेय संख्याओं के बीच अनंत परिमेय संख्याएँ हैं।

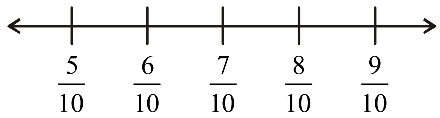
दूसरी विधि

क्या आप $\frac{5}{10}$ और $\frac{9}{10}$ के बीच के एक सौ परिमेय संख्याएँ माध्यमान पद्धति से लिख सकते हैं?

आपको कठिनाई हो सकती है क्योंकि यह बहुत लंबी प्रक्रिया है।

यह आपके लिए क दूसरी विधि दी जा रही है

हम जानते हैं कि $\frac{5}{10} < \frac{6}{10} < \frac{7}{10} < \frac{8}{10} < \frac{9}{10}$



यहाँ $\frac{5}{10}$ और $\frac{9}{10}$ के बीच की कोई तीन परिमेय संख्याएँ लिखिए।

लेकिन अगर हम ध्यान दें $\frac{5}{10} = \frac{50}{100}$ और $\frac{9}{10} = \frac{90}{100}$

अब $\frac{50}{100}$ और $\frac{90}{100}$ के बीच की परिमेय संख्याएँ होंगी-

$$\frac{5}{10} = \frac{50}{100} < \frac{51}{100} < \frac{52}{100} < \frac{53}{100} < \ldots\ldots < \frac{89}{100} < \frac{90}{100} = \frac{9}{10}$$

इसी प्रकार, जब हम मानते हैं

$$\frac{5}{10} = \frac{500}{1000} \text{ और } \frac{9}{10} = \frac{900}{1000}$$

इसलिए $\frac{5}{10} = \frac{500}{1000} < \frac{501}{1000} < \frac{502}{1000} < \frac{503}{1000} < \ldots\ldots\ldots\ldots < \frac{899}{1000} < \frac{900}{1000} = \frac{9}{10}$

इस प्रकार हम परिमेय संख्याओं की अभीष्ट संख्या अंतर्निविष्ट कर सकते हैं।

उदाहरण 8: -3 और 0 के बीच के कोई पाँच परिमेय संख्याएँ लिखिए।

हल : $-3 = -\frac{30}{10}$ और $0 = \frac{0}{10}$ अत:

$-\frac{29}{10}, -\frac{28}{10}, -\frac{27}{10}, \ldots\ldots\ldots, -\frac{2}{10}, -\frac{1}{10}$ जो -3 और 0 के बीच में हैं।

हम इनमें से किन्हीं पाँच को ले सकते हैं।

अभ्यास - 1.2

1. इन संख्याओं को संख्यारेखा पर दर्शाइए।

   (i) $\frac{9}{7}$ (ii) $-\frac{7}{5}$

2. $-\frac{2}{13}, \frac{5}{13}, \frac{-9}{13}$ इन संख्याओं को संख्यारेखा पर दर्शाइए।

3. $\frac{5}{6}$ से छोटी कोई पाँच परिमेय संख्याएँ लिखिए।

4. -1 और 2 के बीच की किन्हीं बारह परिमेय संख्याओं को ज्ञात कीजिए।

5. $\frac{2}{3}$ और $\frac{3}{4}$ के बीच की एक परिमेय संख्या लिखिए।

   [**संकेतः** पहले समान हर की परिमेय संख्याएँ लिखिए।]

6. $-\frac{3}{4}$ और $\frac{5}{6}$ के बीच की कोई दस परिमेय संख्याएँ लिखिए।

1.6 परिमेय संख्याओं का दशमलव में निरूपण

हम जानते हैं कि कोई भी परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ के रूप में रहती है जहाँ $q \neq 0$ और p, q पूर्णांक हैं।

आइए देखें कि कैसे परिमेय संख्या को दशमलव में बदला जा सकता है?

भाग पद्धति से परिमेय संख्या को दशमलव में बदल सकते हैं।

मान लीजिए कि $\frac{25}{16}$ एक परिमेय संख्या है।

सोपान 1: हर को अंश से भाग दीजिए।

$$16\overline{)25}\ (1$$
$$\underline{16}$$
$$9$$

सोपान 2: शेषफल, भाजक से कम आने तक भागक्रिया जारी रखिए।

सोपान 3: भाज्य में और भागफल में अंत में दशमलव बिंदु दीजिए।

$$16\overline{)25.0}\ (1.$$
$$\underline{16}$$
$$90$$

सोपान 4: भाज्य में दशमलव बिंदु के दाहिने तरफ शेषफल के भी दाहिनी ओर शून्य दीजिए। पुनः पूर्ण संख्याओं के समान भाग कीजिए।

सोपान 5: चरण 4 तब तक दोहराइए जबतक शेषफल शून्य अथवा दशमलव स्थान की अभीष्ट संख्या प्राप्त हो।

इसलिए $\frac{25}{16} = 1.5625$

$$16\overline{)25.0000}\ (1.5625$$
$$\underline{16}$$
$$90$$
$$\underline{80}$$
$$100$$
$$\underline{96}$$
$$40$$
$$\underline{32}$$
$$80$$
$$\underline{80}$$
$$\underline{0}$$

मान लीजिए $\frac{17}{5}$

$$5\overline{)17.0}\ (3.4$$
$$\underline{15}$$
$$20$$
$$\underline{20}$$
$$0$$

इसलिए $\frac{17}{5} = 3.4$

$\frac{1}{2}, \frac{13}{25}, \frac{8}{125}, \frac{1974}{10}$ को दशमलव रूप में व्यक्त करने का प्रयत्न कीजिए और मान लिखिए।

हमें पता चलता है कि इन परिमेय संख्याओं के दशमलव भाग में केवल सीमित अंकों की संख्या है। ऐसे दशमलव को अनावर्त दशमलव कहते हैं।

आवर्ती दशमलव :

माना कि परिमेय संख्या $\frac{5}{3}$

दीर्घ भाग पद्धति द्वारा हमें ज्ञात होता है $\longrightarrow$

$$
\begin{array}{r}
3\overline{)5.000}\,(1.666 \\
3 \\
\hline
20 \\
18 \\
\hline
20 \\
18 \\
\hline
20 \\
18 \\
\hline
2
\end{array}
$$

इसलिए $\frac{5}{3} = 1.666...$

हम इसे इस प्रकार लिखते हैं $\frac{5}{3} = 1.\overline{6}$ दशमलव भाग में '6' के ऊपर की रेखा, उस अंक को आवर्ती दर्शाती है।

हमें पता चलता है कि ऊपर के भाग में वही शेषफल बारबार दोहराया जा रहा है और भागफल में अंक 6 दोहराया गया है।

मान लीजिए परिमेय संख्या $\frac{1}{7}$ $\longrightarrow$

दीर्घ भाग पद्धति द्वारा

$$
\begin{array}{r}
7\overline{)10.00000000}\,(0.14285714 \\
7 \\
\hline
30 \\
28 \\
\hline
20 \\
14 \\
\hline
60 \\
56 \\
\hline
40 \\
35 \\
\hline
50 \\
49 \\
\hline
10 \\
7 \\
\hline
30 \\
28 \\
\hline
2
\end{array}
$$

$\frac{1}{7} = 0.142857142857....$

$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$.

142857 पर खींची गई रेखा इन अंकों को इसी क्रम में दोहराये जाने को दर्शाती है।

ऊपर दिये गये उदाहरण परिमेय संख्याओं का अशांत आवर्ती दशमलव के रूप में निरूपण करते हैं अथवा हम उन्हें पुनरावर्तनीय दशमलव कहते हैं।

$\frac{1}{3}$, $\frac{17}{6}$, $\frac{11}{9}$ और $\frac{20}{19}$ को दशमलव रूप में व्यक्त करने का प्रयत्न कीजिए।

$\frac{1}{3} = \boxed{}$ $\frac{17}{6} = \boxed{}$ $\frac{11}{9} = \boxed{}$ $\frac{20}{19} = \boxed{}$

जब हम कुछ परिमेय संख्याओं को भाग पद्धति से दशमलव रूप में बदलने का प्रयास करते हैं, तो हम देखते हैं कि भाग कभी खत्म नहीं होते। यह इसलिए होता है कि भाग करते समय कुछ निश्चित सोपानों के बाद शेषफल बार-बार दोहराया जाता है। इन उदाहरणों में भागफल में एक अंक अथवा अंकों का समुच्चय उसी क्रम में दोराया जाता है।

उदाहरण के लिए 0.33333------.= $0.\overline{3}$

0.12757575---------= $0.12\overline{75}$

123.121121121121----------= $123.\overline{121}$

5.678888-----------= $5.67\overline{8}$ आदि।

ऐसे दशमलव को पुनरावर्तनीय दशमलव अथवा आवर्ती दशमलव कहते हैं।

आवर्ती दशमलव में दोहराये जाने वाले अंकों के समुच्चय को आवर्त कहते हैं।

उदाहरण के लिए

0.3333 ...... = $0.\overline{3}$ में आवर्तन 3 है

0.12757575 .... = $0.12\overline{75}$ में आवर्तन 75 है

आवर्ती दशमलव के आवर्त में अंकों की संख्या आवर्तन कहलाती है।

उदाहरण के लिए

0.3333 ...... = $0.\overline{3}$ में आवर्तन 1 है।

0.12757575 .... = $0.12\overline{75}$ में आवर्तन 2 है।

0.23143143143....... का आवर्त = _______, आवर्तन = _______

125.6788989 ....का आवर्त = _______, आवर्तन = _______

सोचिए और चर्चा कीजिए।

1. इन्हें दशमलव रूप में लिखिए।

(i) $\frac{7}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{23}{10}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{17}{6}$, $\frac{22}{7}$

(ii) ऊपर दी गई परिमेय संख्याओं में कौन से शांत और कौन से अशांत दशमलव हैं?

(iii) ऊपर दी गई परिमेय संख्याओं के हर में अभाज्य संख्याओं के गुणा के रूप में लिखिए।

(iv) यदि ऊपर दी गई सरल परिमेय संख्याओं के हर में 2 और 5 के अलावा अभाज्य भाजक नहीं हैं तो आपको क्या निष्कर्ष निकालते हैं?

1.7 दशमलव रूप को परिमेय रूप में परिवर्तित करना (Conversion)

1.7.1 शांत दशमलव को परिमेय रूप में परिवर्तित करना

कोई दशमलव संख्या लीजिए- 15.75

सोपान 1 : दी हुई संख्या में दशमलव बिन्दु के बाद की संख्या की संख्या जानिए। 15.75 में 2 दशमलव स्थान हैं।

$\therefore$ 15.75 को $\frac{1575}{100}$ भी लिख सकते है।

$$\frac{1575}{100} = \frac{1575 \div 5}{100 \div 5} = \frac{315 \div 5}{20 \div 5} = \frac{63}{4}$$

उदाहरण 9: निम्न दशमलव में से प्रत्येक को $\frac{p}{q}$ रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) 0.35 (ii) -8.005 (iii) 2.104

हल : (i) $0.35 = \frac{35}{100} = \frac{35 \div 5}{100 \div 5} = \frac{7}{20}$

(ii) $-8.005 = \frac{-8005}{1000} = \frac{-8005 \div 5}{1000 \div 5} = \frac{-1601}{200}$

(iii) $2.104 = \frac{2104}{1000} = \frac{2104 \div 4}{1000 \div 4} = \frac{526 \div 2}{250 \div 2} = \frac{263}{125}$

1.7.2 अशांत आवर्ती दशमलव को परिमेय रूप में परिवर्तित करना

निम्न उदाहरण द्वारा परिवर्तित करने की विधि पर चर्चा करेंगे।

उदाहरण 10: नीचे दिए गए प्रत्येक दशमलव संख्या को परिमेय रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) $0.\overline{4}$ (ii) $0.\overline{54}$ (iii) $4.\overline{7}$

हल (i): $0.\overline{4}$

माना कि $x = 0.\overline{4}$

$\Rightarrow x = 0.444 \ldots$ ----------------(i)

यहाँ दशमलव का आवर्तन एक है।

इसलिए हम (i) की दोनों ओर 10 से गुणा करते हैं, तो प्राप्त होता है

$10x = 4.44$ .... ----------------(ii)

(ii) में से (i) घटाने पर

$$
\begin{array}{rl}
10x = & 4.444...... \\
x = & 0.444...... \\
\hline
9x = & 4.000...... \\
\hline
\end{array}
$$

$$x = \frac{4}{9}$$

अत: $0.\overline{4} = \frac{4}{9}$

ध्यान दीजिए।

$0.\overline{4} = \frac{4}{9}$

$0.\overline{5} = \frac{5}{9}$

$0.\overline{54} = \frac{54}{99}$

$0.\overline{745} = \frac{745}{999}$

हल (ii): $0.\overline{54}$

माना कि $x = 0.\overline{54}$

$\Rightarrow x = 0.545454....$ ------------------ (i)

यहाँ दशमलव का आवर्तन दो है।

अत: हम (i) की दोनों ओर 100 से गुणा करते हैं, और हमें प्राप्त होता है

$100x = 54.5454....$ ------------------ (ii)

(ii) – (i) घटाने पर

$$
\begin{array}{rl}
100x = & 54.5454 ...... \\
x = & 0.5454 ..... \\
\hline
99x = & 54.0000...... \\
\hline
\end{array}
$$

$x = \frac{54}{99}$. अत: $0.\overline{54} = \frac{54}{99}$.

हल (iii) : $4.\overline{7}$

माना कि $x = 4.\overline{7}$

$x = 4.777....$ ---------------- (i)

यहाँ दशमलव का आवर्तन एक है।

(i) के दोनों ओर 10 से गुणा करने पर, हमें प्राप्त होता है

$10x = 47.777....$ ---------------- (ii)

(ii) में से (i) घटाने पर हमें प्राप्त होता है

$$10x = 47.777\ .....$$
$$x = 4.777\ .....$$
$$9x = 43.000......$$
$$x = \frac{43}{9}$$

इसलिए $4.\overline{7} = \frac{43}{9}$.

वैकल्पिक पद्धति :

$$4.\overline{7} = 4 + 0.\overline{7}$$
$$= 4 + \frac{7}{9}$$
$$= \frac{9 \times 4 + 7}{9}$$
$$4.\overline{7} = \frac{43}{9}$$

उदाहरण 11: मिश्र आवर्ती दशमलव $15.7\overline{32}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल : माना कि $x = 15.7\overline{32}$

x =15.7323232.... ----------------(i)

चूँकि दो अंक 32 दोहराये जा रहे हैं इसलिए ऊपर के दशमलव का आवर्तन दो है। अतः (i) में दोनों ओर 100 से गुणा करने पर,

100 x = 1573.2323.... -------------(ii)

(ii) में से (i) घटाने पर

$$100\,x = 1573.232323....$$
$$x = 15.732323....$$
$$99\,x = 1557.50$$
$$x = \frac{1557.5}{99} = \frac{15575}{990}$$
$$= 15.7\overline{32} = \frac{15575}{990}$$

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए।

दशमलव $0.\overline{9}, 14.\overline{5}$ और $1.2\overline{4}$ को परिमेय संख्या में बदलिए। क्या आप इसके लिए औपचारिक पद्धति के अलावा कोई और पद्धति बता सकते हैं?

अभ्यास - 1.3

1. निम्न में प्रत्येक दशमलव को $\frac{p}{q}$ रूप में लिखिए।

   (i) 0.57 (ii) 0.176 (iii) 1.00001 (iv) 25.125

2. निम्न में से प्रत्येक दशमलव को परिमेय रूप $\frac{p}{q}$ रूप में लिखिए।

   (i) $0.\overline{9}$ (ii) $0.\overline{57}$ (iii) $0.\overline{729}$ (iv) $12.2\overline{8}$

3. ज्ञात कीजिए $(x+y) \div (x-y)$ यदि

   (i) $x=\frac{5}{2}, y=-\frac{3}{4}$ (ii) $x=\frac{1}{4}, y=\frac{3}{2}$

4. $-\frac{13}{5}$ और $\frac{12}{7}$ के योग को $-\frac{13}{7}$ और $-\frac{1}{2}$ के गुणनफल से भाग दीजिए।

5. यदि किसी संख्या का $\frac{2}{5}$ भाग उसी संख्या के $\frac{1}{7}$ भाग से 36 अधिक है, तो संख्या ज्ञात कीजिए।

6. एक 11मी. लंबी रस्सी में से $2\frac{3}{5}$ मी. और $3\frac{3}{10}$ मी. लंबाई के दो टुकड़े काटे गए तो शेष रस्सी की लंबाई क्या होगी?

7. $7\frac{2}{3}$ मी. कपड़े का दाम ₹$12\frac{3}{4}$ हो तो प्रति मीटर दाम ज्ञात कीजिए।

8. एक आयताकार बगीचे का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो $18\frac{3}{5}$ मी. लंबा और $8\frac{2}{3}$ मी. चौड़ा है। 9.

$-\frac{11}{4}$ प्राप्त करने के लिए $-\frac{33}{16}$ को किस संख्या से भाग देना होगा?

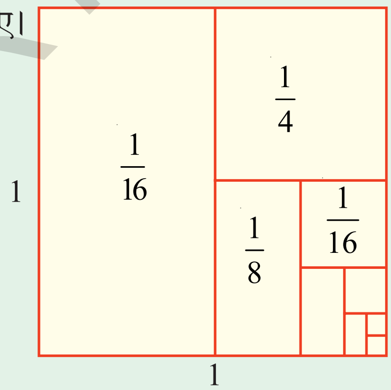
10. यदि 64 मी. कपड़े में से समान माप के 36 पतलून बनाये जा सकते हैं तो प्रत्येक पतलून के लिए कितने कपड़े का उपयोग हुआ?

11. यदि 0.363636 ....दोहराये जाने वाले दशमलव को साधारण परिमेय संख्या में $\frac{p}{q}$ में लिखना हो तो $p+q$ का योग क्या होगा?

हमने क्या विवेचन किया है?

1. परिमेय संख्याएँ, योग व्यवकलन और गुणा संक्रियाओं के सापेक्ष संवृत्त रहती हैं।
2. योग और गाणा की संक्रियाएँ रहती हैं:
   (i) परिमेय संख्याओं के लिए क्रमविनिमय
   (ii) परिमेय संख्याओं के लिए सहचर्य
3. परिमेय संख्याओं के लिए योगात्मक तत्समक '0' है।
4. परिमेय संख्याओं के लिए गणात्मक तत्समक '1' है।
5. परिमेय संख्या का योगात्मक प्रतिलोम उसकी गुणात्मक संख्या रहती है और विलोमता भी।
6. परिमेय संख्या का गुणात्मक प्रतिलोम उसका व्युत्क्रम रहता है।
7. परिमेय संख्याएँ a,b और c के लिए वितरणता
   a (b + c) = ab + ac और a (b – c) = ab – ac
8. परिमेय संख्याएँ संख्यारेखा पर निर्देशित कर सकते हैं।
9. कोई भी दिये गये दो परिमेय संख्याओं के बीच अनंत परिमेय संख्याएँ रहती हैं। मध्य की संकलना कोई दो परिमेय संख्याओं के बीच की परिमेय संख्याएँ ज्ञात करने के लिए सहायक होती हैं।
10. परिमेय संख्याओं का दशमलव में निरूपण या तो शांत दशमलव अथवा अशांत आवर्ती दशमलव के रूप में होता है।

a_n के लिए एक सूत्र का अनुमान लगाइए। अपने अनुमान को सिद्ध करने के लिए विभाजित वर्ग इकाई का प्रयोग कीजिए।



संकेत : $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$......... $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n}$

1
2

तो $a_n = ?$

अध्याय **2**

एक चर वाले रैखिक समीकरण
(LINEAR EQUATIONS IN ONE VARIABLE)

2.0 परिचय

सागर और लता संख्याओं के साथ खेल रहे हैं। सागर ने लता से कहा, "मैंने एक संख्या सोची है। यदि मैं उसके दोगुना में से 7 कम कर दूँ तो 35 बचेगा। क्या तुम वह संख्या बता सकती हो?"

लता ने कुछ देर सोचने के बाद उत्तर दिया, "क्या तुम ही उत्तर बता सकते हो?"

अब हम देखेंगे कि कैसे लता ने उत्तर बताया।

माना कि संख्या 'x' है। इसे दोगुणा करने पर '$2x$'

अब इसमें से 7 कम कर दीजिए। अर्थात, '$2x$' में से 7 घटा दीजिए। घटाने के बाद संख्या होगी

$2x - 7$

किंतु सागर के अनुसार वह 35 के बराबर है।

$\Rightarrow \quad 2x - 7 = 35$

$\therefore \quad 2x = 35 + 7$ (7 का स्थानांतरण RHS की ओर करने पर)

$2x = 42$

$\therefore \quad x = \dfrac{42}{2}$ (2 का स्थानांतरण RHS की ओर करने पर)

$\therefore \quad x = 21$

$\therefore$ सागर द्वारा सोची गई संख्या 21 है।

तरकीब

अंतिम परिणाम लिखिए। उसमें 7 जोड़िए और परिणाम को आधा कीजिए।

सूचना

पदों के स्थानांतरण पर

'+' परिमाण '–' परिमाण होता है।

'–' परिमाण '+' परिमाण होता है।

'×' परिमाण '÷' परिमाण होता है।

'÷' परिमाण '×' परिमाण होता है।

पिछली कक्षाओं में हमने सीखा है कि $2x - 7 = 35$ समीकरण का उदाहरण है। ऊपर की पद्धति से इस समीकरण को हल करने एवं सागर द्वारा सोची गई संख्या पता लगाने में लता को मदद मिली।

इस अध्याय में हम एक चर के रैखिक समीकरण अथवा सरल समीकरणों के बारे में चर्चा करेंगे। ऐसे समीकरणों को हल करने की विधि और इसके हर रोज की समस्याओं में उपयोग की भी चर्चा करेंगे।

आइए याद करें कि समीकरणों के बारे में हम क्या जानते हैं :

(i) बीजगणितीय समीकरण, बीजगणितीय व्यंजकों की समानता है जिसमें चर और अचर सम्मिलित हैं।

$\underbrace{2x - 7}_{\text{L.H.S}} = \underbrace{35}_{\text{R.H.S}}$

(ii) इसमें बराबर का चिह्न होता है।

(iii) बराबर चिह्न के बाँयीं ओर के व्यंजक को समीकरण का L.H.S (Left Hand Side) कहते हैं।

(iv) बराबर चिह्न के सीधी ओर के व्यंजन को समीकरण का R.H.S (Right Hand Side) कहते हैं।

(v) समीकरण में LHS और RHS का मान बराबर होता है।

यह चर के किसी निश्चित मान के लिए सही रहता है। यह मान समीकरण का हल कहलाता है।

$2x - 7 = 35$ यह केवल $x = 21$ के लिए सही है।

अर्थात, यदि $x = 21$

LHS $= 2x - 7$

$= 2 \times 21 - 7$

$= 35$

$=$ RHS

2.1 रैखिक समीकरण

निम्न समीकरणों पर ध्यान दीजिए।

(1) $2x - 7 = 35$ (2) $2x + 2y = 48$ (3) $4x - 1 = 2x + 5$ (4) $x^2 + y = z$

समीकरण (1), (2) और (3) में प्रत्येक समीकरण का घातांक एक है। इसलिए वे रैखिक या एक घातीय समीकरण कहलाते हैं। जब कि समीकरण (4) का घातांक एक नहीं है। इसलिए यह रैखिक समीकरण नहीं है।

प्रयत्न कीजिए।

निम्न में से कौन से रैखिक समीकरण हैं।

(i) $4x + 6 = 8$ (ii) $4x - 5y = 9$ (iii) $5x^2 + 6xy - 4y^2 = 16$

(iv) $xy + yz + zx = 11$ (v) $3x + 2y - 6 = 0$ (vi) $3 = 2x + y$

(vii) $7p + 6q + 13s = 11$

2.2 एक चर वाले सरल समीकरण अथवा रैखिक समीकरण

निम्नलिखित समीकरण ध्यानपूर्वक देखिए।

(i) $2x - 7 = 35$ (ii) $4x - 1 = 2x + 5$ (iii) $2x + 2y = 48$

हमने अभी-अभी सीखा है कि ये रैखिक समीकरणों के उदाहरण हैं। प्रत्येक समीकरण में चर की संख्या का निरीक्षण कीजिए।

(i) और (ii) एक चर रैखिक समीकरण के उदाहरण हैं। किंतु समीकरण (iii) में दो चर 'x' और 'y' हैं। इसलिए इसे द्विचर रैखिक समीकरण कहते हैं।

इस प्रकार $ax + b = 0$ या $ax = b$ रूप के समीकरणों को एक चर में रैखिक समीकरण अथवा सरल मीकरण कहते हैं, जहाँ a, b अचर है और $a \neq 0, x$ एक चर राशी है ।

प्रयत्न कीजिए।

निम्न में कौन से सरल समीकरण हैं?

(i) $3x + 5 = 14$ (ii) $3x - 6 = x + 2$ (iii) $3 = 2x + y$

(iv) $\frac{x}{3} + 5 = 0$ (v) $x^2 + 5x + 3 = 0$ (vi) $5m - 6n = 0$

(vii) $7p + 6q + 13s = 11$ (viii) $13t - 26 = 39$

2.3 एक पक्ष में चर रखने वाले सरल समीकरण का हल करना

करल समीकरण (जिसमें चर एक पक्ष में हैं) हल करने की विधि का स्मरण कीजिए। उसी विधि का उपयोग करते हुए लता समस्या का हल ढूंढ़ पाई और सागर द्वारा सोची गई संख्या बताई।

उदाहरण 1: समीकरण हल कीजिए $3y + 39 = 8$

हल : दिया गया समीकरण : $3y + 39 = 8$

$3y = 8 - 39$ (39 को R.H.S. की ओर लाने पर)

$3y = -31$

$y = \frac{-31}{3}$ (3 को R.H.S. की ओर लाने पर)

$\therefore$ $3y + 39 = 8$ 3 का हल $y = \frac{-31}{3}$ है।

सत्य/असत्य बताइए। उत्तर की जाँच कीजिए।

समीकरण हल करते समय काव्या ने ऐसे किया-

$3x + x + 5x = 72$

$9x = 72 \quad x = 72 \times 9 = 648$

वह कहाँ पर गलत है? सही उत्तर ज्ञात कीजिए।

क्या आपने ध्यान दिया कि हल $(\frac{-31}{3})$ परिमेय संख्या है?

जाँच कीजिए : L.H.S. $= 3y + 39 = 3\,(\frac{-31}{3}) + 39 = -31 + 39 = 8$ R.H.S.

उदाहरण 2: $\frac{7}{4} - p = 11$ को हल कीजिए।

हल : $\frac{7}{4} - p = 11$

$$-p = 11 - \frac{7}{4} \quad (\frac{7}{4} \text{ को R.H.S. की ओर लाने पर})$$

$$-p = \frac{44-7}{4}$$

p को LHS से RHS की ओर स्थानांतरित कीजिए और p का मान ज्ञात कीजिए। क्या p के मान में कोई परिवर्तन आया है?

$$-p = \frac{37}{4}$$

$$\therefore p = -\frac{37}{4} \quad (\text{दोनों ओर } -1 \text{ से गुणा करने पर})$$

जाँच कीजिए : L.H.S. = $\frac{7}{4} - p = \frac{7}{4} - (-\frac{37}{4}) = \frac{7}{4} + \frac{37}{4} = \frac{7+37}{4} = \frac{44}{4} = 11 = \text{RHS}$

अभ्यास - 2.1

निम्न सरल समीकरण हल कीजिए।

(i) $6m = 12$ (ii) $14p = -42$

(iii) $-5y = 30$ (iv) $-2x = -12$

(v) $34x = -51$ (vi) $\frac{n}{7} = -3$

(vii) $\frac{2x}{3} = 18$ (viii) $3x + 1 = 16$

(ix) $3p - 7 = 0$ (x) $13 - 6n = 7$

(xi) $200y - 51 = 49$ (xii) $11n + 1 = 1$

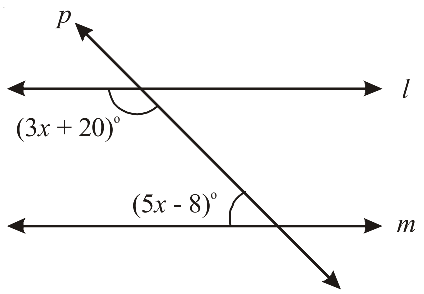
(xiii) $7x - 9 = 16$ (xiv) $8x + \frac{5}{2} = 13$

(xv) $4x - \frac{5}{3} = 9$ (xvi) $x + \frac{4}{3} = 3\frac{1}{2}$

2.3.1 कुछ अनुप्रयोग

निम्न उदाहरणों को ध्यानपूर्वक देखिए।

उदाहरण 3 : यदि $l \parallel m$, तो 'x' का मान ज्ञात कीजिए।



हल : यहाँ $l \parallel m$ और p तिर्यक छेदी रेखा है।

अतः $3x + 20^o + 5x - 8^o = 180^o$ (तिर्यक छेदी रेखा के एक ही ओर बने अंतःकोणों का योग)

$$3x + 20^o + 5x - 8^o = 180^o$$

$$8x + 12^o = 180^o$$

$$8x = 180^o - 12^o$$

$$8x = 168^o$$

$$x = \frac{168^o}{8} = 21^o$$; अतः $x = 21^o$

उदाहरण 4: यदि दो संख्याओं का योग 29 और एक संख्या दूसरी से 5 अधिक है। वे संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : यह हमारी एक समस्या है। हम संख्याएँ नहीं जानते। हमें उन्हें ज्ञात करना है।

माना कि छोटी संख्या 'x' है, तो बड़ी संख्या '$x + 5$' होगी।

लेकिन दिया है कि इन दोनों संख्याओं का योग 29 है।

$$\Rightarrow x + x + 5 = 29$$

$$\Rightarrow 2x + 5 = 29$$

$$\therefore 2x = 29 - 5$$

$$\therefore 2x = 24$$

$$x = \frac{24}{2}$$ ('2' को RHS की ओर ले जाने पर)

$$x = 12.$$

इसलिए छोटी संख्या $x = 12$ और

बड़ी संख्या $x + 5 = 12 + 5 = 17.$

जाँच कीजिए : 17, 12 से 5 अधिक है और उनका योग $= 12 + 17 = 29.$

उदाहरण 5: किसी संख्या के चौगुना में से 5 कम किया जाये तो वह 19 के बराबर होती है। वह संख्या मालूम कीजिए।

हल : यदि संख्या 'x' ली जाए तब

संख्या का चौगुना होगा '$4x$'

जह इसमें से 5 किया जाये तो यह 19 के बराबर होगी, अत:

$\Rightarrow \quad 4x - 5 = 19$

$4x = 19 + 5$ (-5 को RHS ले जाने पर)

$4x = 24$

$\therefore x = \frac{24}{4}$ (4 को RHS ले जाने पर)

$\Rightarrow x = 6$

अत: वह संख्या 6 है।

जाँच कीजिए : 6 का चौगुना 24 और $24 - 5 = 19.$

उदाहरण 6: एक आयताकार बगीचे की लंबाई, उसकी चौड़ाई से 17 मी अधिक है। यदि बगीचे की परिमिति 178 मी. हो तो बगीचे के माप बताइए।

हल : माना कि बगीचे की चौड़ाई $= x$ मी

तब बगीचे की लंबाई $= x + 17$ मी

$\therefore$ परिमिति $= 2$ (लंबाई + चौड़ाई)

$= 2\,(x + 17 + x)$ मी

$= 2\,(2x + 17)$ मी

लेकिन दिया है कि आयत का परिमाप 178 मी है।

$$\therefore \quad 2\,(2x + 17) = 178$$

$$4x + 34 = 178$$

$$4x = 178 - 34$$

$$4x = 144$$

$$x = \frac{144}{4} = 36$$

बगीचे की चौड़ाई $= 36$ मी

बगीचे की लंबाई $= 36 + 17 = 53$ मी

स्वयं इसकी जाँच करने का प्रयत्न कीजिए।

उदाहरण 7: दो संपूरक कोणों में अंतर 34 है। कोण बताइए।

हल : माना कि छोटा कोण x^{o} है।

चूँकि दोनों कोणों में अंतर 34^{o} है, बड़ा कोण $= x + 34^{o}$

चूँकि संपूरक कोणों का योग 180^{o} होता है

अतः $x + (x + 34) = 180^{o}$

$$2x + 34 = 180^{o}$$

$$2x = 180 - 34 = 146^{o}$$

$$x = \frac{146^{o}}{2} = 73^{o}$$

अतः छोटा कोण $x = 73^{o}$

बड़ा कोण $x + 34 = 73 + 34 = 107^{o}$

उदाहरण 8: विजया की माता की वर्तमान आयु, विजया की वर्तमान आयु के चारगुना अधिक है। 6 वर्ष के बाद उनके आयु का योग 62 वर्ष होगा। उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि विजया की वर्तमान आयु 'x' वर्ष है

तो हम निम्न तालिका बना सकते हैं-

	विजया	विजया की माँ
वर्तमान आयु	x	$4x$
6 वर्ष के बाद आयु	$x + 6$	$4x + 6$

$\therefore$ 6 वर्ष के बाद उनकी आयु का योग $= (x + 6) + (4x + 6)$

$$= x + 6 + 4x + 6$$

$$= 5x + 12$$

लेकिन दिया गया है कि 6 वर्ष के बाद उनकी आयु का योग 62 होगा, अतः

$\Rightarrow 5x + 12 = 62$

$$5x = 62 - 12$$

$$5x = 50$$

$$x = \frac{50}{5} = 10$$

विजया की वर्तमान आयु $x = 10$ वर्ष

विजया की माँ की वर्तमान आयु $= 4x = 4 \times 10 = 40$ वर्ष

उदाहरण 9 : एक परीक्षा में 90 बहुवैकल्पिक प्रश्न पूछे गए। प्रत्येक सही उत्तर के लिए 2 अंक प्रदान किये जाते हैं और प्रत्येक गलत उत्तर के लिए 1 अंक घटाया जाता है। सहाना को परीक्षा में 60 अंक मिले जबकि उसने सभी प्रश्नों के उत्तर दिये हैं, तो उसने कितने प्रश्नों के सही उत्तर दिये हैं?

हल : माना कि सही उत्तर वाले प्रश्नों की संख्या 'x' है। तब गलत उत्तर वाले प्रश्नों की संख्या होगी $= 90 - x$

दिया गया है कि प्रत्येक सही उत्तर के लिए 2 अंक दिये जाते हैं।

$\therefore$ सही उत्तर के लिए कुल प्राप्तांक $= 2x$

और यह भी दिया गया है कि गलत उत्तर के लिए '1' अंक घटाया जाता है।

$\therefore$ प्राप्तांक में से घटाये जाने वाले अंकों की संख्या

$= (90 - x) \times 1 = 90 - x$

कुल अंक $= 2x - (90 - x) = 2x - 90 + x = 3x - 90$

लेकिन दिया है कि कुल प्राप्तांक 60 है।

$\Rightarrow \quad 3x - 90 = 60$

$3x = 60 + 90$

$3x = 150$

$$x = \frac{150}{3} = 50$$

जाँच

(50 x 2) - (40 x 1)

100 - 40 = 60

अतः सही उत्तर वाले प्रश्नों की संख्या $x = 50$

उदाहरण 10: रवि बैंक में कैशियर है। उसके पास क्रमशः ₹ 100, ₹50, ₹10 के नोट हैं। इन नोटों का अनुपात 2 : 3 : 5 रवि के पास कुल नगद ₹ 4,00,000 हैं तो उसके पास प्रत्येक प्रकार के कितने नोट हैं?

हल : माना कि ₹ 100 के नोटों की संख्या $= 2x$

₹ 50 के नोटों की संख्या $= 3x$

₹10 के नोटों की संख्या $= 5x$

$\therefore$ कुल रुपये $= (2x \times 100) + (3x \times 50) + (5x \times 10)$

$200x + 150x + 50x = 400x$

परंतु प्रश्न के अनुसार कुल रुपये = ₹ 4, 00,000

संकेतः $2x : 3x : 5x$, 2 : 3 : 5 के समान है।

$$\Rightarrow \qquad 400x = 4,00,000$$

$$x = \frac{400000}{400} = 1000$$

जाँच

2000 x 100 = 2L

3000 x 50 = 1.5L

5000 x 10 = $\frac{.5L}{4Lakhs}$

अत: ₹ 100 के नोटों की संख्या $2x = 2 \times 1000 = 2000$

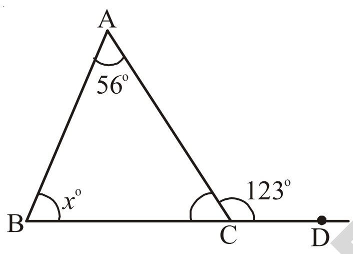
₹ 50 के नोटों की संख्या $3x = 3 \times 1000 = 3000$

₹ 10 के नोटों की संख्या $5x = 5 \times 1000 = 5000$

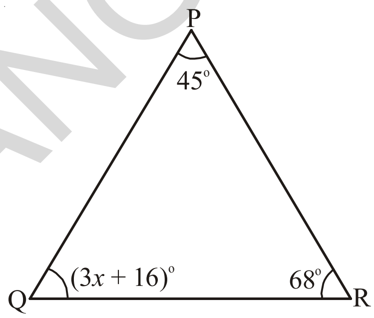
अभ्यास - 2.2

1. निम्न आकृतियों में 'x' ज्ञात कीजिए।

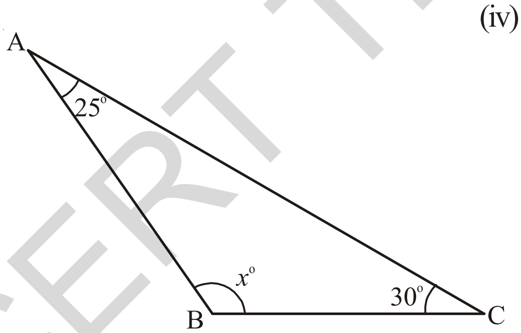
(i)



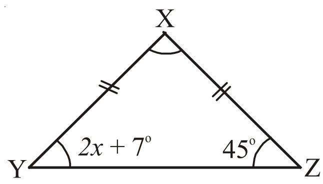
(ii)



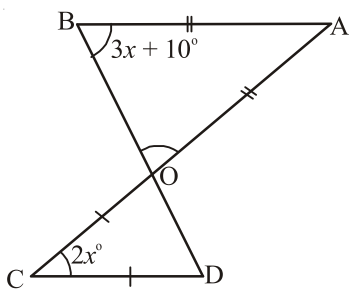
(iii)



(iv)



(v)



2. दो संख्याओं में 8 का अंतर है। यजि बड़ी संख्या में 2 मिलाया जाये तो परिणाम छोटी संख्या से तिगुना होगा। वे संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

3. वे दो संख्याएँ कौनसी हैं जिनका योग 58 और अंतर 28 है?

4. दो क्रमिक विषम संख्याओं का योग 56 है। वे संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

5. तीन क्रमिक 7 के गुणांकों का योग 777 है। वे गुणांक मालूम कीजिए।

   (संकेत : 7 के तीन क्रमिक गुणज 'x', '$x + 7$', '$x + 14$')

6. एक आदमी 10 किमी पैदल चलता है, उसके बाद वह कुछ दूरी रेल से तय करता है और तत्पश्चात रेल द्वारा तय की गई दूरी के दोगुना मोटरकार द्वारा तय करता है। यदि कुल यात्रा 70किमी की हो तो उसने रेल द्वारा कितनी यात्रा की?

7. विनय ने पिजा खरीदा और उसे तीन टुकड़ों में काट दिया। जब उसने पहले टुकड़े का वजन किया तब उसे ज्ञात हुआ कि वह दूसरे टुकड़े से 7 ग्राम हल्का है और तीसरा टुकड़े से 4ग्राम भारी है। यदि पूर्ण पिजा का वजन 300 ग्राम हो तो प्रत्येक टुकड़े का वजन कितना होगा?

   (**संकेत :** प्रथम टुकड़े का वजन 'x' हो तो दूसरे टुकड़े का वजन '$x + 7$', **तीसरा** टुकड़े का वजन '$x - 4$' है)

8. एक आयताकार क्षेत्र के चारों ओर की दूरी 400 मी. है। क्षेत्र की लंबाई उसके चौड़ाई से 26 मी. अधिक है। इस क्षेत्र की लंबाई और चौड़ाई की गणना कीजिए।

9. एक आयताकार क्षेत्र की लंबाई, उसकी चौड़ाई के दोगुना से 8 मी. कम है। यदि आयताकार क्षएत्र का परिमाप 56 मी. हो तो इसकी लंबाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

10. एक त्रिभुज की दो समान भुजाएँ, तीसरी भुजा के दोगुणा से 5 मी. प्रत्येक भुजा कम हैं। यदि प्रत्येक त्रिभुज का परिमाप 55 मी. हो तो इसकी भुजाओं की लंबाई ज्ञात कीजिए।

11. दो पूरक कोणों में अंतर 12^{o} है। कोण ज्ञात कीजिए।

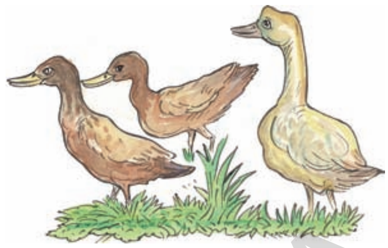
12. राहुल और लक्ष्मी की आयु में अनुपात 5:7 है। चार वर्ष बाद, उनकी आयु का योग 56 वर्ष होगा। उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

13. एक परीक्षा में 180 वैकल्पिक प्रश्न हैं। प्रत्येक सही उत्तर के लिए 4 प्राप्त होते हैं, और प्रत्येक छोड़े गये व गलत उत्तर के लिए एक अंक कुल प्राप्तांक में से घटाये जाते हैं। यदि एक छात्र को इस परीक्षा में 450 अंक प्राप्त होते हैं तो उसने कितने प्रश्नों के सही उत्तर दिये?

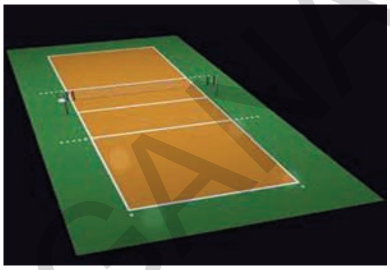
14. ₹ 500 की धनराशि ₹ 5 और ₹ 10 के नोटों के रूप में है। यदि कुल नोटों की संख्या 90 हो तो प्रत्येक प्रकार के नोटों की संख्या ज्ञात कीजिए।

   (**संकेत :** ₹ 5 के नोटों की संख्या 'x' है, तो ₹ 10 के नोटों की संख्या $= 90-x$)

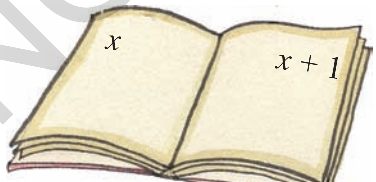
15. एक व्यक्ति ने **पेन** और **पेन्सिल** खरीदने में ₹ 564 खर्च किये। यदि प्रत्येक **पेन** का मूल्य ₹ 7 और प्रत्येक **पेन्सिल** का मूल्य ₹ 3 हो तथा खरीदे गये कुल **वस्तुओं** की संख्या 108 हो तो उसने प्रत्येक प्रकार के कितने **वस्तु** खरीदे ?



16. एक पाठशाला के वालीबाल मैदान का परिमाप 177 फीट है और इसकी लंबाई, इसकी चौड़ाई की दोगुना है। तो वालीबाल मैदान की लंबाई-चौड़ाई बताइए।



17. एक पुस्तक के पृष्ठों पर अंकित पृष्ठसंख्याओं का योग 373 है। वह पुस्तक कितने पृष्ठों की है ?



2.4 दोनों पक्षों में चर रहनेवाले समीकरण हल करना

हम जानते हैं कि दो व्यंजकों के मानों की समानता ही समीकरण है। $2x - 7 = 35$ समीकरण में दो व्यंजक 2x-7 और 35 है। अधिकतम उदाहरणों में जो हमने अबतक देखे हैं, RHS केवल एक संख्या है। परंतु यह हमेशा आवश्यक नहीं है। इसलिए दोनों तरफ के व्यंजकों में चर रह सकते हैं। यह कैसे होता है, अब हम देखेंगे।

निम्न उदाहरण की ओर ध्यान दीजिए।

उदाहरण 11: रफी और फातिमा की वर्तमान आयु का अनुपात 7 : 5 है। दस वर्ष बाद उनकी आयु में अनुपात 9 : 7 होगा। उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हल : चूँकि रफी और फातिमा की वर्तमान आयु का अनुपात 7:5,

हम रफी की आयु $7x$ और फातिमा की आयु $5x$ ले सकते हैं।

(सूचित किया जाता है कि $7x$ और $5x$ का अनुपात 7:5 के समान है)

10 वर्ष के बाद रफी की आयु $= 7x + 10$

10 वर्ष के बाद फातिमा की आयु $= 5x + 10$

10 वर्ष के बाद रफी और फातिमा की आयु में अनुपात होगा $7x + 10 : 5x + 10$

परंतु दिये अनुसार यह अनुपात 9 : 7 होनी चाहिए।

$\Rightarrow \quad 7x + 10 : 5x + 10 = 9 : 7$

अर्थात, $7(7x + 10) = 9(5x + 10)$

$\Rightarrow \quad 49x + 70 = 45x + 90.$

क्या तुमने देखा है कि ऊपर के समीकरण में दोनों ओर बीजगणितीय व्यंजक हैं। अब हम ऐसे समीकरणों को हल करना सीखेंगे।

ऊपर का समीकरण है $\quad 49x + 70 = 45x + 90$

$\Rightarrow \quad 49x - 45x = 90 - 70$ (70 को RHS और $45x$ को LHS स्थानांतरण करने पर)

$\therefore \quad 4x = 20$

$\therefore \quad x = \dfrac{20}{4} = 5$

अतः रफी की आयु $7x = 7 \times 5 = 35$ वर्ष

और फातिमा की आयु $5x = 5 \times 5 = 25$ वर्ष

उदाहरण 12: Solve $5(x + 2) - 2(3 - 4x) = 3(x + 5) - 4(4 - x)$

हल : $5x + 10 - 6 + 8x = 3x + 15 - 16 + 4x$ (कोष्टक निकालने पर)

$13x + 4 = 7x - 1$ (सदृश पदों को जोड़ने पर)

$13x - 7x = -1 - 4$ (4 को RHS, $7x$ को LHS स्थानांतरित करने पर)

$6x = -5$

$x = \dfrac{-5}{6}$ (6 को RHS स्थानांतरित करने पर)

अभ्यास - 2.3

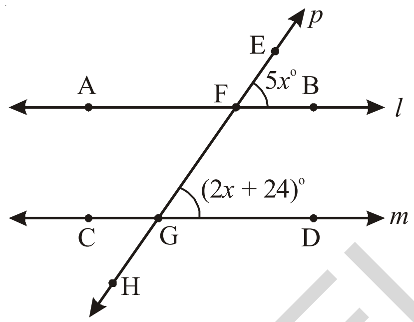
निम्न समीकरणों को हल कीजिए।

1. $7x - 5 = 2x$
2. $5x - 12 = 2x - 6$
3. $7p - 3 = 3p + 8$
4. $8m + 9 = 7m + 8$
5. $7z + 13 = 2z + 4$
6. $9y + 5 = 15y - 1$
7. $3x + 4 = 5(x - 2)$

8. $3(t-3) = 5(2t-1)$
9. $5(p-3) = 3(p-2)$
10. $5(z+3) = 4(2z+1)$
11. $15(x-1) + 4(x+3) = 2(7+x)$
12. $3(5z-7) + 2(9z-11) = 4(8z-7) - 111$
13. $8(x-3) - (6-2x) = 2(x+2) - 5(5-x)$
14. $3(n-4) + 2(4n-5) = 5(n+2) + 16$

2.4.1 कुछ अधिक अनुप्रयोग

उदाहरण 13: आकृति में $l \parallel m$, और p तिर्यक छेदी रेखा है। 'x' का मान ज्ञात कीजिए।



हल : दिया है कि $l \parallel m$ और p तिर्यक छेदी रेखा है।

इसलिए $\angle EFB = \angle FGD$ (संगत कोण)

इसलिए $5x^\circ = (2x+24)^\circ$

$5x - 2x = 24$

$3x = 24$

$x = \frac{24}{3} = 8^\circ$

उदाहरण 14: हेमा उसकी बेटी दामिनी से 24 वर्ष आयु में बड़ी है। 6 वर्ष पहले, हेमा की आयु, दामिनी की आयु की तिगुना थी। उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि दामिनी की वर्तमान आयु 'x' वर्ष है। तो हम निम्न तालिका बना सकते हैं।

	दामिनी	हेमा
वर्तमान आयु	x	$x+24$
6 वर्ष पहले	$x-6$	$(x+24) - 6 = x + 24 - 6 = x + 18$

परंतु, दिया है कि 6 वर्ष पूर्व हेमा की आयु, दामिनी की आयु के तिगुना थी।

$\therefore\ x + 18 = 3(x-6)$

$$x + 18 = 3x - 18$$
$$x - 3x = -18 - 18$$
$$-2x = -36$$
$$x = 18.$$

इसलिए, दामिनी की वर्तमान आयु $= x = 18$ वर्ष

हेमा की वर्तमान आयु $= x + 24 = 18 + 24 = 42$ वर्ष

उदाहरण 15: दो अंकों की एक संख्या में अंकों का योग 8 है। यदि संख्या में 18 मिलाया जाये तो उनके अंकों का क्रम उलटा होता है। संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि इकाई के स्थान का अंक 'x' है

तो दहाई के स्थान का अंक $= 8 - x$ (अंकों का योग 8)

अतः संख्या $10(8 - x) + x = 80 - 10x + x = 80 - 9x$ ——(1)

अब, अंकों की अदल-बदल करने पर प्राप्त संख्या $= 10 \times (x) + (8 - x)$

$= 10x + 8 - x = 9x + 8$

दिया है कि यदि संख्या में 18 मिलाया जोये तो इसके अंकों की अदल-बदल होती है।

$\therefore$ संख्या + 18 = अंकों की अदल-बदल करने के बाद प्राप्त संख्या

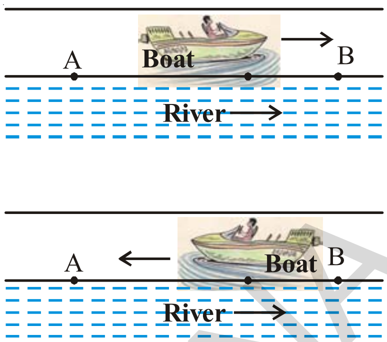
$$\Rightarrow (80 - 9x) + 18 = 9x + 8$$
$$98 - 9x = 9x + 8$$
$$98 - 8 = 9x + 9x$$
$$90 = 18x$$
$$x = \frac{90}{18} = 5$$

समीकरण (1) में x का मान रखने पर

$\therefore$ संख्या $= 80 - 9 \times 5 = 80 - 45 = 35.$

उदाहरण 16: एक मोटर बोट स्थित नदी में प्रवाह के साथ जाती है और समुद्र तट पर स्थित दो शहरों के बीच की दूरी पाँच घंटे में तय करती है। यदि यही दूरी वह प्रवाह के विरुद्ध छह घंटे में तय करती है। यदि प्रवाह का वेग 2 किमी/घंटे है तो बोट का स्थिर पानी में वेग ज्ञात कीजिए।

हल : चूँकि हमें बोट का स्थिर पानी में वेग ज्ञात करना है, माना कि यह x किमी/घंटे है। इसका अर्थ है कि प्रवाह के सात बोट का वेग $(x + 2)$ किमी/घंटे रहेंगे। क्योंकि पानी का प्रवाह बोट को अपने वेग से 2 किमी/घंटे अधिक वेग से धकेलती है। परंतु प्रवाह के विरुद्ध जाते समय वोट को पानी के प्रवाह के विपरीत कार्य करना पड़ता है।



इसलिए प्रवाह की विपरीत दिशा में बोट का वेग $= (x - 2)$ किमी/घंटे

अब प्रवाह की दिशा में बोट का वेग $= (x + 2)$ किमी/घंटे

$\Rightarrow$ 1 घंटे में तय की गई दूरी $= x + 2$ किमी

$\therefore$ 5 घंटे में तय की गई दूरी $= 5\,(x + 2)$ किमी

अतः A और B के बीच की दूरी $= 5\,(x + 2)$ किमी

प्रवाह के विपरीत बोट का वेग $= (x - 2)$ किमी/घंटे

$\Rightarrow$ 1 घंटे में तय की गई दूरी $= (x - 2)$ किमी

6 घंटे में तय की गई दूरी $= 6\,(x - 2)$ किमी

$\therefore$ अतः A और B के बीच की दूरी निश्चित है।

$$\therefore\ 5\,(x + 2) = 6\,(x - 2)$$

$$\Rightarrow\quad 5x + 10 = 6x - 12$$

$$\Rightarrow\quad 5x - 6x = -12 - 10$$

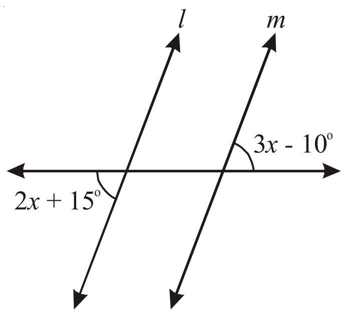
$$\therefore\quad -x = -22$$

$$x = 22.$$

इसलिए स्थिर पानी में बोट का वेग 22 किमी/घंटे होगा।

अभ्यास - 2.4

1. 'x' का मान ज्ञात कीजिए यदि $l \parallel m$.



2. किसी संख्या के आठ गुना में से 10 कम कर दिया जाये तो वह किसी संख्या के छह गुना और 4 योग के बराबर रहता है। संख्या ज्ञात कीजिए।
3. दो अंकों की एक संख्या के अंकों का योग 9 है। यदि संख्या में से 27 घटाया जाये तो इसके अंकों के स्थान बदलते हैं। वह संख्या ज्ञात कीजिए।
4. एक संख्या दो भागों में इस प्रकार विभाजित की जाती है कि एक भाग, दूसरे भाग से 10 अधिक रहता है। यदि दोनों भागों का अनुपात 5:3 हो तो संख्या और दोनों भाग ज्ञात कीजिए।
5. जब मैंने एक निश्चित संख्या के तीन गुना में 2 जोड़ा तो मुझे वही संख्या प्राप्त होती है जो मैं इस संख्या में से 50 घटाता हूँ तो प्राप्त होती है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।
6. मेरी अपनी बहन से दोगुनी आयु की है। 5 वर्ष बाद वह अपनी बहन से दो वर्ष बड़ी होगी। दोनों बहनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।
7. 5 वर्ष में रेशमा की आयु अपने 9 वर्ष पहले की आयु से तिगुनी हो जायेगी। उसकी वर्तमान आयु क्या है?
8. एक नगर की जनसंख्या में 1200 लोग बढ़ गये और फिर यह नई जनसंख्या 11% घट गई। इस समय नगर में, 1200 लोग बढ़ने से पहले की जनसंख्या से 32 लोग कम हैं। वहाँ की वर्तमान जनसंख्या मालूम कीजिए।

2.5 समीकरणों को सरलतम रूप में लघुकृत करना- रैखिक समीकरण का लघुकरण

उदाहरण 17: हल कीजिए $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=\frac{x}{3}+\frac{1}{2}$

हल :

$$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=\frac{x}{3}+\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$ ($\frac{x}{3}$ को L.H.S. और $\frac{1}{4}$ को R.H.S. करने पर)

$$\frac{3x-2x}{6}=\frac{2+1}{4}$$ (2 और 3 का LCM 6 ; 2 और 4 का LCM 4)

$$\frac{x}{6}=\frac{3}{4}$$

$$\therefore x=\frac{3}{4}\times 6$$ (6 को R.H.S. स्थानांतरण करने पर)

$$\therefore x=\frac{9}{2}$$

$$\therefore x=\frac{9}{2}$$ दिये गये समीकरण का हल है।

उदाहरण 18: हल कीजिए $\frac{x-4}{7}-\frac{x+4}{5}=\frac{x+3}{7}$

हल :

$$\frac{x-4}{7}-\frac{x+4}{5}=\frac{x+3}{7}$$

$$\frac{5(x-4)-7(x+4)}{35}=\frac{x+3}{7}$$

$$\frac{5x-20-7x-28}{35}=\frac{x+3}{7}$$

$$\frac{-2x-48}{35}=\frac{x+3}{7}$$

$$-2x-48=\frac{(x+3)}{7}\times 35$$

$$\Rightarrow \quad -2x-48=(x+3)\times 5$$

$$\Rightarrow \quad -2x-48=5x+15$$

$$\Rightarrow \quad -2x-5x=15+48$$

$$-7x = 63$$

$$x=\frac{63}{-7}=-9.$$

उदाहरण 19: समीकरण हल कीजिए $\frac{5x+2}{2x+3}=\frac{12}{7}$ ————(1)

हलः दिये हुए समीकरण के दोनों ओर $2x+3$ से गुणा करने पर, हमें प्राप्त होगा

$$\frac{5x+2}{2x+3}\times(2x+3)=\frac{12}{7}\times(2x+3)$$

$$5x+2=\frac{12}{7}\times(2x+3)$$

फिर समीकरण के दोनों ओर 7 से गुणा करने पर, हमें प्राप्त होगा

$$7\times(5x+2)=7\times\frac{12}{7}\times(2x+3)$$

$$\Rightarrow 7 \times (5x+2) = 12 \times (2x+3) \qquad \text{———}(2)$$

$$35x + 14 = 24x + 36$$

$$35x - 24x = 36 - 14$$

$$11x = 22$$

$$\therefore x = \frac{22}{11} = 2$$

अब दिया गया समीकरण (1) और समीकरण (2) ध्यानपूर्वक कीजिए।

दिया गया समीकरण	समीकरण का सरलीकृत रूप
$\frac{5x+2}{2x+3} = \frac{12}{7}$	$7 \times (5x+2) = 12 \times (2x+3)$

आपने क्या ध्यान दिया? हमने इसे इसप्रकार किया-

1. LHS के अंश को RHS के हर से गुणा कीजिए। $\frac{5x+3}{2x+3} = \frac{12}{7}$
2. RHS के अंश को LHS के हर से गुणा कीजिए। $\frac{5x+3}{2x+3} = \frac{12}{7}$
3. (1) और(2) में प्राप्त व्यंजकों को बराबर मानिए $7 \times (5x+2) = 12 \times (2x+3)$

स्पष्ट कारणों के लिए, हल करने की इस पद्धति को हम 'वज्रगुणन पद्धति' कहते हैं। अब उदाहरणों द्वारा वज्रगुणन पद्धति का हम निरूपण करते हैं।

उदाहरण 20: $\frac{x+7}{3x+16} = \frac{4}{7}$ समीकरण हल कीजिए।

हल : वज्रगुणन द्वारा, हमें प्राप्त होता है $\frac{x+7}{3x+16} = \frac{4}{7}$

$$7 \times (x + 7) = 4 \times (3x + 16)$$

$$7x + 49 = 12x + 64$$

$$7x - 12x = 64 - 49$$

$$-5x = 15$$

$$x = -3$$

उदाहरण 21: रेहाना को उसके फ्राक पर 24% छूट मिली। छूट के बाद उसने ₹ 380 दुकानदार को दिये। उस फ्राक का अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि फ्राक का अंकित मूल्य ₹ x

तो x का 24% छूट है

उसने $x - 24\%$ दिये जो प्रश्न में दिये अनुसार ₹380 है

$x - x$ का $24\% = 380$

$$\Rightarrow \quad x - \frac{24}{100} \times x = 380$$

$$\Rightarrow \quad \frac{100x - 24x}{100} = 380$$

$$\Rightarrow \quad \frac{76x}{100} = 380$$

$$x = \frac{380 \times 100}{76}$$

$\therefore \quad x = 500$

$\therefore$ अंकित मूल्य = ₹ 500

उदाहरण 22: किसी संख्या का $\frac{4}{5}$ भाग उसके $\frac{3}{4}$ भाग से 4 अधिक है। संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि वह संख्या 'x' है

संख्या का $\frac{4}{5}$ भाग $= \frac{4}{5}x$

और संख्या का $\frac{3}{4}$ भाग $= \frac{3}{4}x$

दिया गया है कि $\frac{4}{5}x$, $\frac{3}{4}x$ से 4 बड़ा है।

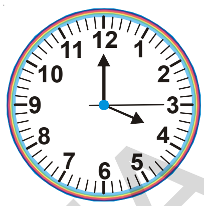
$$\Rightarrow \frac{4}{5}x - \frac{3}{4}x = 4$$

$$\frac{16x - 15x}{20} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{x}{20} = 4 \quad \Rightarrow x = 80$$

अतः वह संख्या 80 है।

उदाहरण 23: जॉन ने अपनी घड़ी ₹ 301 में बेची और उसपर उसे 14% हानि हुई। उस घड़ी का क्रय मूल्य मालूम कीजिए।



हल : माना कि घड़ी का क्रय मूल्य $= ₹\ x$

उस घाटा = 'x' का 14% $= \frac{14}{100} \times x = \frac{14x}{100}$

घड़ी का विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य – हानि

$$\Rightarrow 301 = x - \frac{14x}{100}$$

$$301 = \frac{100x - 14x}{100}$$

$$301 = \frac{86x}{100}$$

$$\frac{301 \times 100}{86} = x$$

$$350 = x$$

अत: घड़ी का क्रय मूल्य = ₹ 350

उदाहरण 24: एक आदमी को कुछ निश्चित दूरी तय करनी है। उसने इसका दो-तिहाई भाग 4 किमी प्रतिघंटे से और शेष दूरी 5 किमी प्रतिघंटे की गति से तय की। यदि इसके लिए उसे कुल समय 42 मिनट लगे तो कुल दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि दूरी 'x' किमी है।

	पहला भाग	दूसरा भाग
तय की गई दूरी	x का $\frac{2}{3} = \frac{2x}{3}$	बाकी दूरी $= x - \frac{2x}{3} = \frac{x}{3}$
गति	4 किमी प्रति घंटे	5 किमी प्रति घंटे
लगा हुआ समय	$\frac{\frac{2}{3}x}{4} = \frac{2x}{12}$ घंटे	$\frac{\frac{x}{3}}{5} = \frac{x}{15}$

अत: कुल समय $= \frac{2x}{12} + \frac{x}{15}$ घंटे

$\Rightarrow \quad (\frac{2x}{12}+\frac{x}{15})$घंटे $= 42$ मिनट

$\Rightarrow \quad (\frac{2x}{12}+\frac{x}{15})$घंटे $= \frac{42}{60}$ मिनट

$$\frac{2x}{12}+\frac{x}{15}=\frac{42}{60}$$

$$\frac{10x+4x}{60}=\frac{42}{60}$$

$\Rightarrow \quad 14x = 42$

$\Rightarrow \quad x = 3$

कुल दूरी $x = 3$ किमी

उदाहरण 25: एक भिन्न का अंश उसके हर से 6 कम है। यदि अंश में 3 जोड़ा जाये तो वह $\frac{2}{3}$ के बराबर होता है। मूल भिन्न संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि भिन्न का हर है 'x' ता

भिन्न का अंश होगा $= x - 6$

अतः भिन्न होगा $= \frac{x-6}{x}$

यदि 3 अंश में जोड़ दिया जाये तो यह होगा $\frac{2}{3}$

$\Rightarrow \frac{x-6+3}{x}=\frac{2}{3}$

$$\frac{x-3}{x}=\frac{2}{3}$$

$\Rightarrow 3x-9=2x$

$$x=9$$

$\therefore$ भिन्न $= \frac{x-6}{x} = \frac{9-6}{9} = \frac{3}{9}$

इसलिए मूल भिन्न $\frac{3}{9}$ है।

उदाहरण 26: शिरीषा के पास पचास पैसे और पच्चीस पैसों के सिक्कों के रूप में कुल ₹ 9 है। पचास पैसों के सिक्कों की संख्या से पच्चीस के सिक्कों की संख्या दोगुनी है। उसके पास प्रत्येक प्रकार के कितने सिक्के हैं?

हल : माना कि पचास पैसों के सिक्कों की संख्या $= x$

अतः पच्चीस पैसों के सिक्कों की संख्या $= 2x$

पचास पैसों के सिक्कों का कुल मूल्य $= x \times 50$ पैसा $=$ ₹ $\frac{50x}{100} =$ ₹ $\frac{x}{2}$

पच्चीस पैसों के सिक्कों का कुल मूल्य $= 2x \times 25$ पैसा $= 2x \times \frac{25}{100}$

$$= 2x \times \frac{1}{4} = ₹\,\frac{x}{2}$$

कुल सिक्कों का मूल्य $= \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$

लेकिन प्रश्न के अनुसार यह मूल्य ₹ 9 है।

$$\Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = 9$$

$$\frac{2x}{2} = 9$$

$$\therefore\ x = 9$$

अतः पचास पैसों के सिक्कों की संख्या $= x = 9$

पच्चीस पैसों के सिक्कों की संख्या $= 2x = 2 \times 9 = 18.$

उदाहरण 27: एक आदमी अपनी बाइक 24 किमी प्रति घंटे की गति से चलाता हुआ अपने गंतव्य स्थान पर 5 मिनट देर से पहुँचता है। यदि वह 30 किमी प्रति घंटे से गाड़ी चलाता तो वह उसके गंतव्य स्थान पर नियत समय से 4 मिनट पहले पहुँचता था। उसके गंतव्य स्थान की दूरी कितनी है?

हल : माना कि दूरी 'x' किमी है।

अतः 24 किमी/घंटे की गति से 'x' किमी के लिए लगनेवाला समय $= \frac{x}{24}$ घंटे

30 किमी प्रति घंटे की गति से 'x'किमी के लिए लगनेवाला समय $= \frac{x}{30}$ घंटे

परंतु प्रश्न के अनुसार दिया है कि दोनों के समय में अंतर $= 9$ मिनट $= \dfrac{9}{60}$ घंटे

$$\therefore \quad \frac{x}{24} - \frac{x}{30} = \frac{9}{60}$$

$$\therefore \quad \frac{5x - 4x}{120} = \frac{9}{60}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{120} = \frac{9}{60}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{9}{60} \times 120 = 18$$

अतः दूरी 18 किमी है।

अभ्यास - 2.5

1. निम्न समीकरण हल कीजिए।

(i) $\dfrac{n}{5} - \dfrac{5}{7} = \dfrac{2}{3}$

(ii) $\dfrac{x}{3} - \dfrac{x}{4} = 14$

(ii) $\dfrac{z}{2} + \dfrac{z}{3} - \dfrac{z}{6} = 8$

(iv) $\dfrac{2p}{3} - \dfrac{p}{5} = 11\dfrac{2}{3}$

(v) $9\dfrac{1}{4} = y - 1\dfrac{1}{3}$

(vi) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{4}{5} + \dfrac{x}{5} + \dfrac{3x}{10} = \dfrac{1}{5}$

(vii) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{2}$

(viii) $\dfrac{2x-3}{3x+2} = \dfrac{-2}{3}$

(ix) $\dfrac{8p-3}{7p+1} = \dfrac{-2}{4}$

(x) $\dfrac{7y+2}{5} = \dfrac{6y-5}{11}$

(xi) $\dfrac{x+5}{6} - \dfrac{x+1}{9} = \dfrac{x+3}{4}$

(xii) $\dfrac{3t+1}{16} - \dfrac{2t-3}{7} = \dfrac{t+3}{8} + \dfrac{3t-1}{14}$

2. वह कौनसी संख्या है जिसका तीसरा भाग उसके पाँचवें भाग से 4 अधिक है?

3. दो धनात्मक पूर्णांकों में अंतर 36 है। एक पूर्णांक को दूसरे पूर्णांक से भाग देने पर भागफल 4 आता है। पूर्णांक ज्ञात कीजिए। (**संकेतः** यदि एक पूर्णांक 'x' हो तो दूसरा '$x - 36$' होगा)

4. एक भिन्न का अंश उसके हर से 4 कम है। यदि अंश और हर दोनों में 1 जोड़ा जाये तो वह $\frac{1}{2}$ होता है। भिन्न ज्ञात कीजिए।

5. ऐसी तीन क्रमिक संख्याएँ ज्ञात कीजिए यदि उन्हें क्रमशः 10, 17 और 26 से भाग दिया जाये तो उनके भागफलों का योग 10 होगा।

(संकेत : माना कि क्रमिक संख्याएँ $= x, x+1, x+2$, तो $\frac{x}{10} + \frac{x+1}{17} + \frac{x+2}{26} = 10$)

6. 40 छात्रों की कक्षा में लड़कियों की संख्या, लड़कियों की संख्या के $\frac{3}{5}$ है। कक्षा में लड़कों की संख्या ज्ञात कीजिए।

7. 15 वर्ष बाद, मेरी की आयु उसकी वर्तमान आयु की चारगुना होगी। उसकी वर्तमान आयु बताइए।

8. अरविंद के पास किडी बैंक है। इसमें एक रुपये के पचास सिक्के भरे हैं। इसमें पचास पैसों के सिक्कों की संख्या से एक रुपये के सिक्कों की संख्या से तिगुनी अधिक है। यदि किडी बैंक में कुल रु.35 हैं तो बैंक में प्रत्येक प्रकार के सिक्कों की संख्या कितनी है?

9. A और B दोनों मिलकर एक काम 12 दिनों में करते हैं। यदि 'A' अकेला वह काम 20 दिनों में करता है तो बताइए कि B अकेला उस काम को कितने समय में पूरा करेगा?

10. एक रेलगाड़ी 40 किमी/घंटे चलती है तो अपने गंतव्य पर 11 मिनट देर से पहुँचती है। यदि वह 50 किमी/घंटे से चलती है तो केवल 5 मिनट देर से पहुँचती है। रेलगाड़ी द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।

11. मृगों के झुंड का एक चौथाई भाग घने जंगल में गया है। इनकी कुल संख्या का एक-तिहाई भाग खेत में चरने गये हैं, शेष नदी के किनारे पानी पी रहे हैं जिनकी संख्या 15 है। कुल मृगों की संख्या बताइए।

12. एक रेडियो ₹ 903 में बेचने से व्यापारी को 5% लाभ हुआ। रेडियो का क्रयमूल्य बताइए।

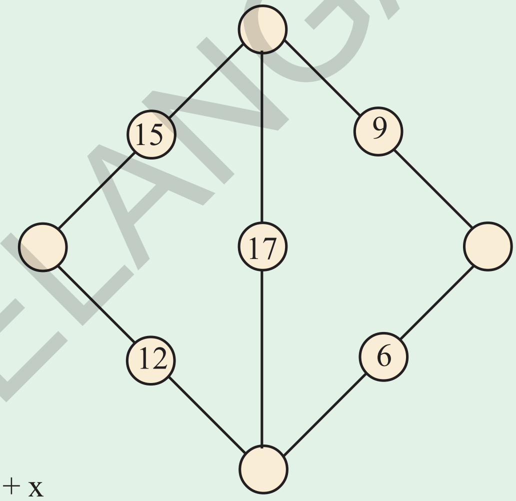
13. शेखर, अपनी मिठाइयों का एक-चौथाई रेणु को देता है और फिर 5 मिठाइयाँ राजी को देता है। उसके पास 7 मिठाइयाँ बचती हैं तो शुरू में उसके पास कुल कितनी मिठाइयाँ थीं?

हमने क्या चर्चा की?

1. यदि समीकरण का घातांक एक हो तो इसे रैखिक समीकरण कहते हैं।
2. यदि रैखिक समीकरण में केवल एक चर हो तो इसे एक चर में रैखिक समीकरण अथवा सरल समीकरण कहते हैं।
3. वह मान जो समीकरण में चर के लिए प्रतिस्थापन करने पर L.H.S. = R.H.S हो, उसे समीकरण का हल अथवा मूल कहते हैं।
4. समीकरण में संख्याओं के जैसे ही चर भी एक पक्ष से दूसरे पक्ष में स्थानांतरण किये जा सकते हैं।

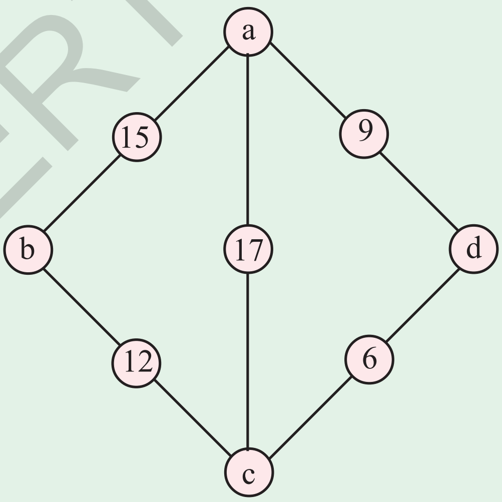
एक जादूई हीरा

खाली वृत्त ऐसी संख्याओं से भरिए जिससे कि हीरे की प्रत्येक पंक्ति के अंकों के योग से समान राशि प्राप्त हो।



संकेतः संख्याएँ इस पैटर्न में हों

$a = x, b = 5 + x, \ c = 3 + x, \ d = 11 + x$



जहाँ x कोई एक संख्या है और प्रत्येक पंक्ति का योग होगा $20 + 2x$

उदाहरणतः यदि $x = 1$, तो $a = 1, b = 6, \ c = 4, \ d = 12$ और प्रत्येक पंक्ति का योग 22 होगा।

अध्याय 3

चतुर्भुजों की रचना

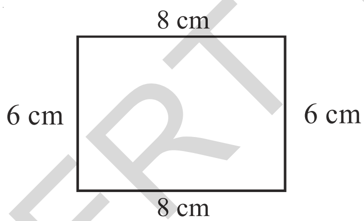
(CONSTRUCTIONS OF QUADRILATERALS)

3.0 परिचय

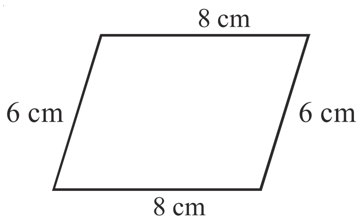
हम खेत, खेत, घर, पुल, रेल की पटरियाँ, पाठशाला भवन, खेलने का मैदान आदि देखते ही रहते हैं। जब हम इनके चित्र खींचते हैं तो ये आकृतियां कैसी दिखाई देती हैं? इन सबका मूल ज्यामितीय आकार क्या है? इनमें से अधिकतर चार भुजाओं वाली चतुर्भुज आकृतियाँ होती हैं।

कमल और जोसेफ एक 8 सेमी लंबी और 6 सेमी चौड़ी माप का फ्रेम बनाने के लिए आकृति बना रहे हैं। उन्होंने एक दूसरे की आकृतियाँ देखे बगैर अपनी-अपनी व्यक्तिगत आकृतियाँ बनाईं।

जोसेफ



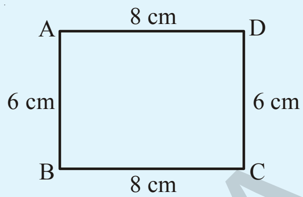
कमल



क्या दोनों आकृतियाँ समान हैं?

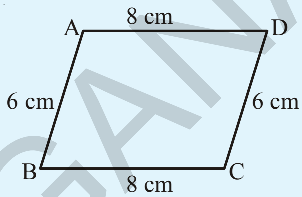
तुम देख सकते हो कि दोनों आकृतियाँ समान माप के चतुर्भुज हैं किन्तु आकृतियाँ समान नहीं हैं। VII कक्षा में हमने त्रिभुज के अद्वितीयता के बारे में चर्चा की। किसी एक त्रिभुज की रचना के लिए तुम्हें कोई तीन नापों की आवश्यकता होती है। वे तीन भुजाएँ, दो भुजाएँ और उनके बीच के कोण, अथवा दो कोण और एक भुजा, आदि हो सकते हैं। एक अद्वितीय चतुर्भुज की रचना के लिए हमें कितने मापों की आवश्यकता होती है? अद्वितीय चतुर्भुज वे हैं जो विभिन्न व्यक्तियों द्वारा समान नापों के बनाये जाने पर भी भिन्न हों।

यह कीजिए :

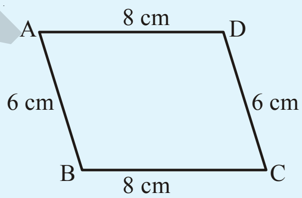


(i)

समान लम्बाई की, मान लो 8 से.मी. छड़ियों का एक युग्म है। समान लम्बाई की मान लो, 6 से.मी. छड़ियों का और एक युग्म लीजिए। इन्हें 8 से.मी. लम्बाई और 6 से.मी. चौड़ाई का आयत प्राप्त होने के लिए योग्य रूप से व्यवस्थित कीजिए। यह आयत 4 उपलब्ध नापों द्वारा बनाया गया। अब आयत की चौड़ाई के साथ-साथ जरा सा दबाव डालिए। क्या वह अभी भी वैसे ही दिखाई दे रहा है? आप को आयत का नया आकार प्राप्त होगा। आकृति (ii) देखें कि अब आयत, समानान्तर चतुर्भुज बना है। क्या तुमने छड़ियों की लंबाइयाँ बदली हैं? नही! भुजाओं के नाप वही है। इस नये प्राप्त आकार पर विरुद्ध दिशा में और एक बार दबाव डालिए। तुम्हे क्या प्राप्त होगा? पूनः तुम्हें एक और समानांतर चतुर्भुज प्राप्त होगा जो पहले से पूर्णतः भिन्न है। आकृति (iii) के अभी भी चारो नाप समान हैं। यह बताता है कि चतुर्भुज के चार नाप, इसकी अद्वितीयता का निर्धारण नहीं कर सकते। इसलिए, कितने नाप एक अद्वितीय चतुर्भुज का निर्धारण कर सकते हैं?



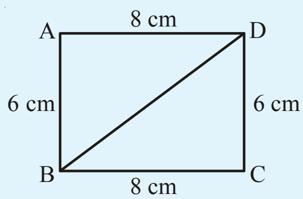
(ii)



(iii)

हम पूनः वही क्रिया करेंगे!

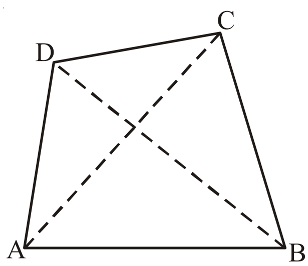
तुमने 8 से.मी. लम्बाई की दो छड़ियाँ और 6 से.मी. लम्बाई की दो छड़ियाँ लेकर इनसे आयत बनाया।



(iv)

अब एक और छड़ी जिसकी लम्बाई BD के समान है, लेकर BD के साथ-साथ रखो। आकृति (iv) यदि तुमने अब चौड़ाई पर दबाव डाला, क्या इसका आकार बदलेगा? नहीं। क्या आकृति विवृत किये बगैर वह बदल नहीं सकता? 5 वीं वाँ छड़ी से आयत की अद्वितीयता निश्चित हुई। अर्थात कोई दूसरा चतुर्भुज (दी हुआ भुजाओं की लम्बाई के साथ) अब असंभव है। इस प्रकार हम देखते हैं कि 5 नापों द्वारा अद्वितीय चतुर्भुज का निर्धारण हो सकता है। किन्तु कोई भी 5 नाप (भुजा और कोण के) अद्वितीय चतुर्भुज का निर्धारण करने के लिए पर्याप्त हैं?

3.1 चतुर्भुज और उनके गुण!

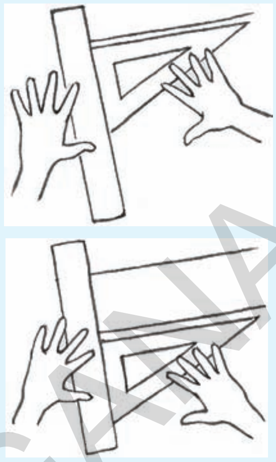


दी गयी आकृति में, ABCD चतुर्भुज है जिसके शीर्ष A, B, C, D और भुजाएँ; $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ है। ABCD के कोण $\angle BAD$, $\angle ADC$, $\angle DCB$ और $\angle CDB$ और कर्ण $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ है।

यह कीजिए।

उपकरण

तुम्हें आवश्यकता है : पटरी, कोनिया समकोणक, चांदा



याद रखिए :

दी गई रेखाएँ समानांतर हैं या नहीं जांचने के लिए, प्रथम रेखा से दूसरी रेखा तक कोनिया संलग्न आकृति दिखाये जैसे खिसकाइए।

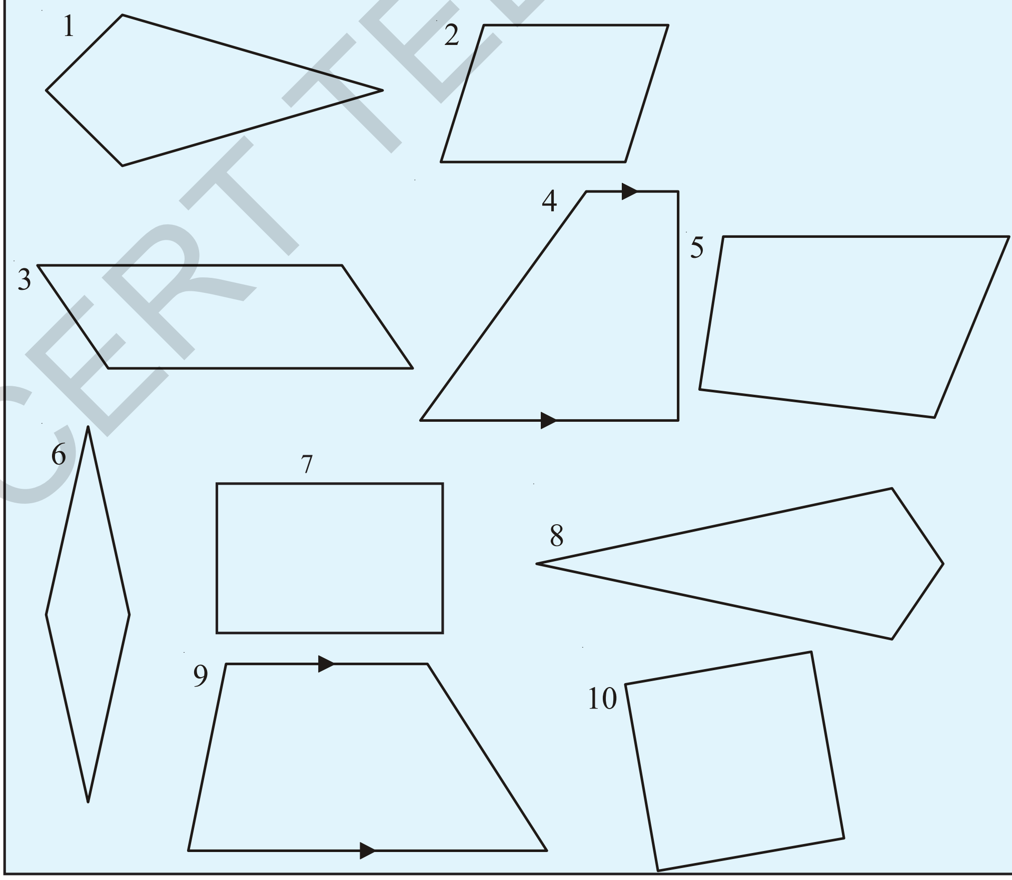
अब योग्य उपकरणों का उपयोग करते हुऐ निम्नलिखित **जाँच कीजिए।**

प्रत्येक चतुर्भुज के लिए।

(a) यदि विपरीत भुजाएँ समानांतर दिखाई देती हैं, तो जाँच कीजिए।

(b) प्रत्येक कोण मापिए।

(c) प्रत्येक भुजा की लम्बाई मापिए।



अपना अभिमत अंकित कीजिए और निम्न सारणी पूर्ण कीजिए।

चतुर्भुज	समानांतर भुजाओं के दो युग्म	समानांतर भुजाओं कशा एक युग्म	4 समकोण	विपरीत भुजाओं के दो युग्म समान	समान विपरीत कोणों के दो युग्म	आसन्न भुजाओं के दो युग्म समान	4 भुजाएँ समान●
1	×	×	×	×	×	✓	×
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							

समानांतर चतुर्भुज यह चतुर्भुज है जिसमें समानांतर भुजाओं के दो युग्म रहते हैं।

(a) समानांतर चतुर्भुज का आकार कौन-सा है?

(b) समानांतर चतुर्भुज के और कौन-से गुण है?

आयत एक समानांतर चतुर्भुज रहता है जिसमें चारों कोण समकोण रहते हैं।

(a) आयत का आकार कौन-सा है?

(b) आयत के गुण कौन-से हैं?

समचतुर्भुज एक समानांतर चतुर्भुज रहता है जिसकी चारों भुजाएँ समान रहती हैं।

(a) समचतुर्भुज किसे कह सकते है?

(b) समचतुर्भुज के गुण कौन-से है?

वर्ग एक समचतुर्भुज रहता है जिसके चारो कोण समकोण रहते हैं।

(a) वर्ग का आकार कौन-सा है?

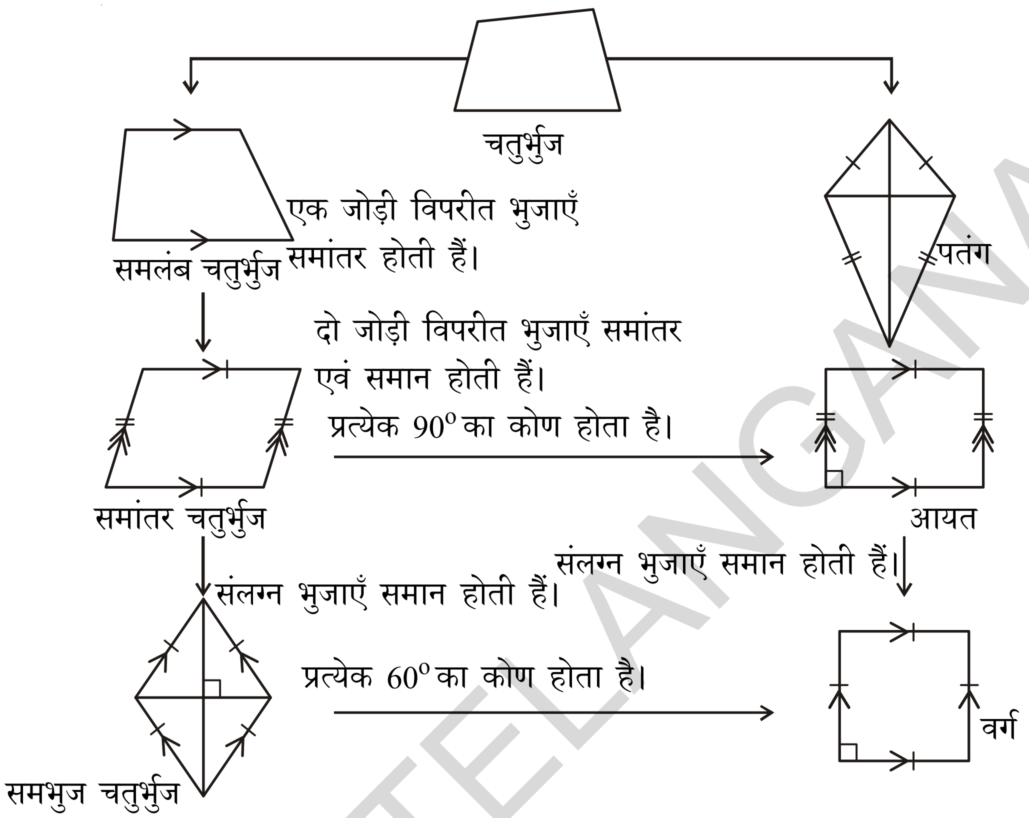
(b) वर्ग के गुण कौन-से हैं?

समलंब चतुर्भुज एक चतुर्भुज रहता है जिसमें कम से कम समानांतर भुजाओं का एक युग्म रहता है।

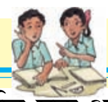
(a) कौन-सा आकार केवल समलंब चतुर्भुज रहता है और किसी का नहीं?

(b) समलंब चतुर्भुज के गुण क्या है?

1 से 8 चतुर्भुज काइट्स हैं। काइट्स के कुछ गुण लिखिए।



सोचिए-चर्चा कीजिए और लिखिए :



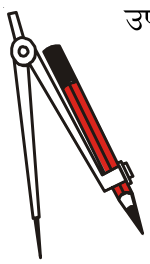
1. क्या प्रत्येक आयत एक समानांतर चतुर्भुज होता है? क्या प्रत्येक समानांतर चतुर्भुज एक आयत रहता है?
2. उमा ने एक चिक्की बनाई। वह इसे आयताकार बनाना चाहती थी। इसे आयताकार रखने के लिए वह इसे कितने भिन्न तरीके से बाँट सकती है ?

यह कीजिए।

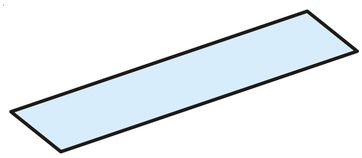
वह तुम 60^{o} का कोण बना सकते हो ?

उपयोग कर सकते हैं

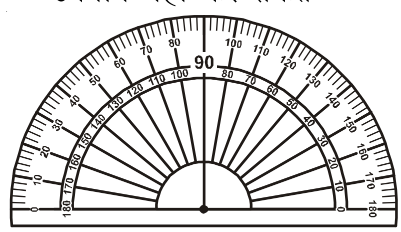
उपयोग नहीं कर सकते



प्रकार (Compass)



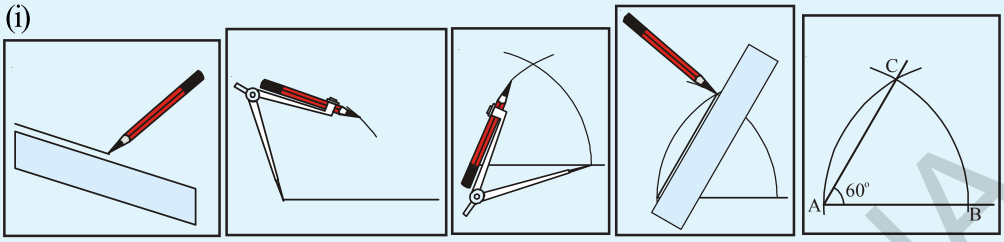
स्केल



चाँद

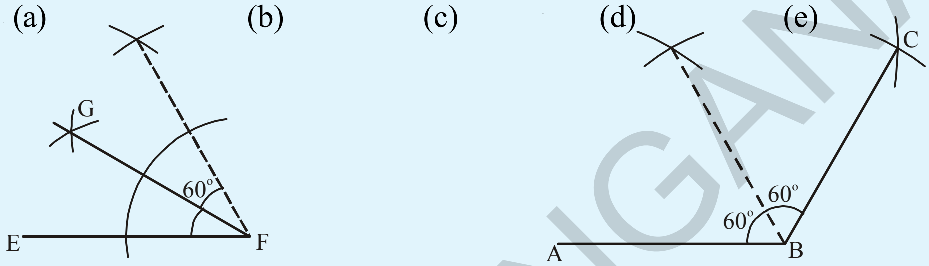
सचित्र उदाहरण समझिए और निर्माण के सोपानों को लिखिए।

(i)



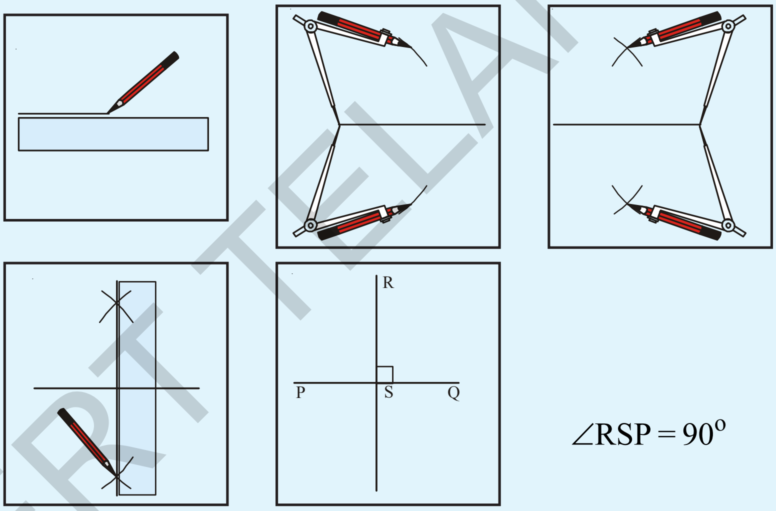
(a) (b) (c) (d) (e)

(ii)



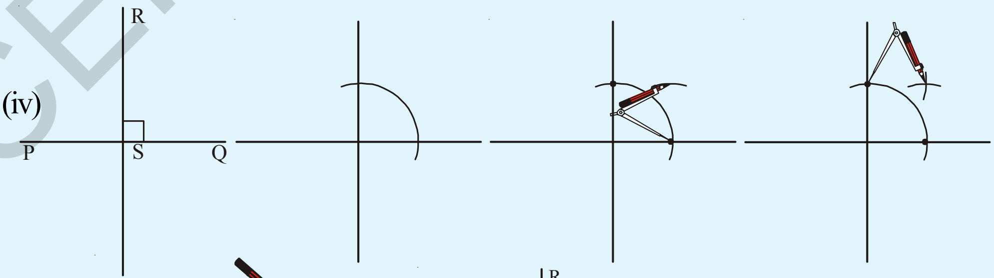
$\angle ABC = 120^{o}$ $\angle EFG = 30^{o}$

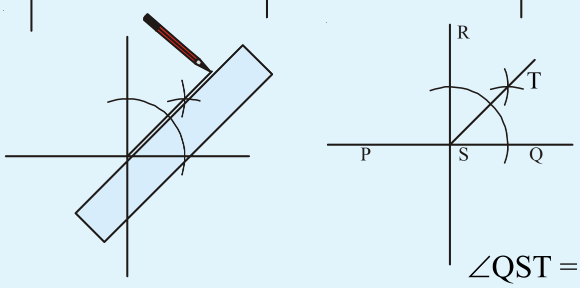
(iii)



$\angle RSP = 90^{o}$

(iv)





$\angle QST = 45^{o}$

3.2 चतुर्भुज का निर्माण

जब निम्नलिखित नाप दिये गये हों तो हम चतुर्भुज बनाएँगे।

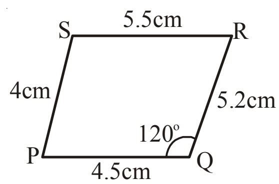
1. जब चार भुजाएँ और एक कोण दिये हों (S.S.S.S.A)
2. जब चार भुजाएँ और एक कर्ण दिये हों (S.S.S.S.D)
3. जब तीन भुजाएँ और दो कर्ण दिए हों (S.S.S.D.D)
4. जब तीन भुजाएँ और उनके बीच के दो कोण दिए हों (S.A.S.A.S)

3.2.1 निर्माण: जब चार भुजाओं की लंबाइयाँ और एक कोण दिया हो। (S.S.S.S.A)

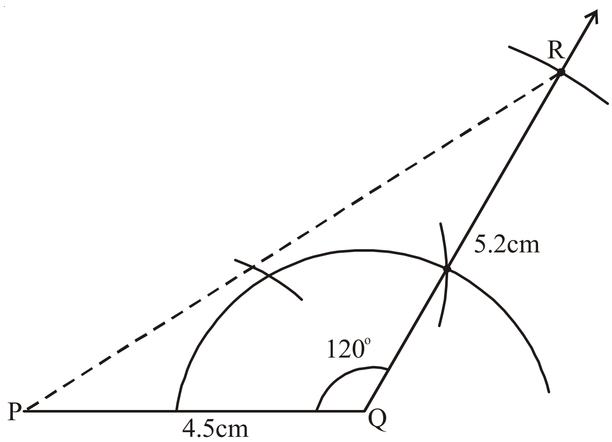
उदाहरण 1 : चतुर्भुज PQRS बनाइए जिसमें PQ = 4.5 से.मी., QR = 5.2 से.मी., RS = 5.5 से.मी., PS = 4 से.मी. और $\angle$ RQP = 120^o.

हल :

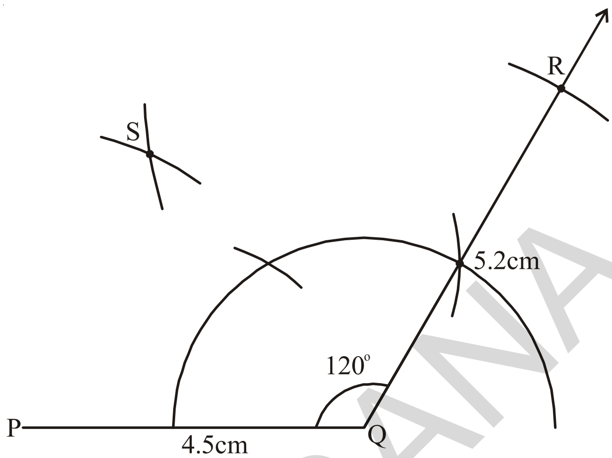
सोपान 1 : अभीष्ट चतुर्भुज की एक रफ आकृति बनाइए और दिये गये नाप अंकित किजिए। क्या यह पर्याप्त है ?



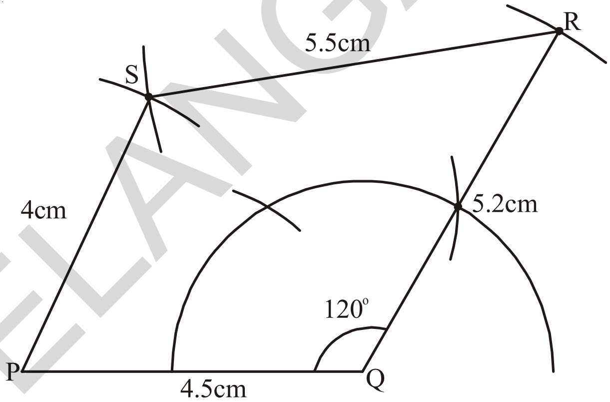
सोपान 2 : PQ = 4.5 से.मी., $\angle$RQP = 120^o और QR = 5.2 से.मी. लेकर निर्माण की S.A.S. गुण का उपयोग करते हुए ΔPQR बनाइए।



सोपान 3 : चतुर्थ शीर्ष 'S', का स्थान मालूम करने के लिए, P को केंद्र लेकर और 4 से.मी. (PS = 4 से.मी.) अर्थव्यास के एक चाप खींचिए। R को केंद्र लेते हुए 5.5 से.मी. (RS = 5.5 से.मी.) अर्धव्यास से और एक चाप खींचिए जो पहले चाप को S पर काटता है।

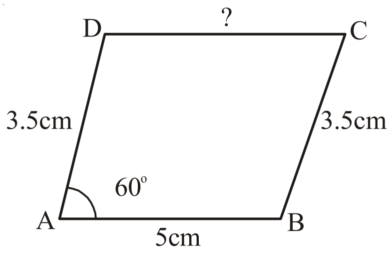


सोपान 4 : अभीष्ट चतुर्भुज PQRS पूर्ण करने के लिए PS और RS मिलाइए।



उदाहरण 2 : समानांतर चतुर्भुज ABCD बनाइए। दिया है कि AB = 5 से.मी., BC = 3.5 से.मी. और $\angle A = 60^o$.

हल :

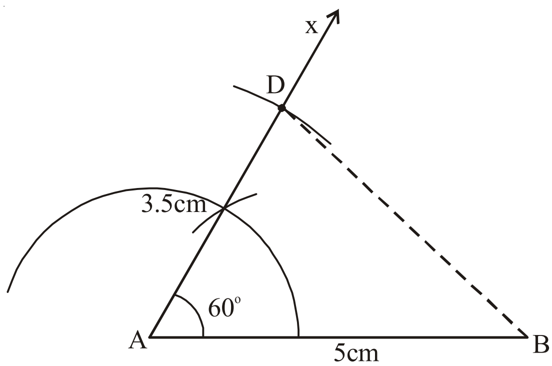


सोपान 1 : समानांतर चतुर्भुज (चतुर्भुज का एक विशेष प्रकार) की एक रफ आकृति बनाइए और दिये गये नाप अंकित कीजिए।

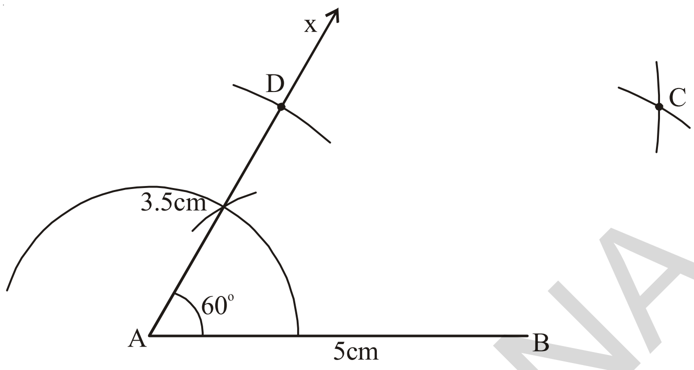
यहाँ हमें केवल माप दिये गए हैं। किन्तु ABCD एक समानांतर चतुर्भुज है, हम लिख सकते हैं कि CD = AB = 5 से.मी. और AD = BC = 3.5 से.मी. (कैसे?)

(अब हमें कुल 5 नाप प्राप्त हुए।)

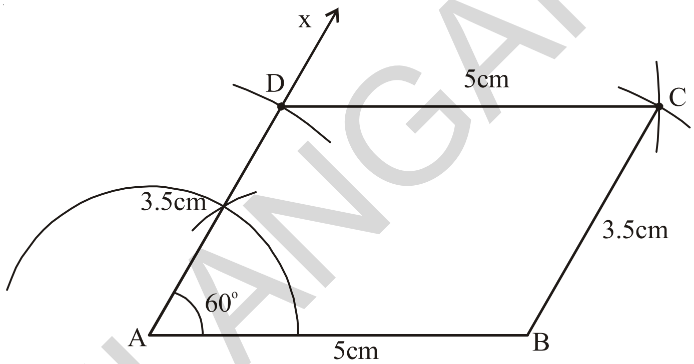
सोपान 2: AB = 5 से.मी., $\angle A = 60^o$ और AD = 3.5 से.मी. नापों को उपयोग करते हुए Δ BAD बनाइए।



सोपान 3: BC=3.5 से.मी. और DC = 5 से.मी., इन दो नापों द्वारा चौथे शीर्ष 'C' का स्थान निधिरित किजिए।



सोपान 4 : अभिष्ट समानांतर चतुर्भुज ABCD पूर्ण करने के लिए B, C और C, D मिलाइए।



(परी और चांदे का उपयोग करते हुए समानांतर चतुर्भुज के गुणों की जाँच कीजिए।)

चतुर्भुज के निर्माण करने के लिए सोपानों के बारे में सामान्य कथन करेंगे।

सोपान 1: आकृति का कच्चा रेखाचित्र खींचिए।

सोपान 2: यदि दिये गये नाप पर्याप्त न हो तो आकृति का विश्लेषण कीजिए। आवश्यक नापों को प्राप्त करने के लिए आकृति के विशेष गुणों का उपयोग करने का प्रयत्न कीजिए।

सोपान 3 : 5 में से तीन नापों द्वारा त्रिभुज बनाइए और शेष नापों का उपयोग 4^{th} शीर्ष का स्थान निर्धारण के लिए उपयोग कीजिए।

सोपान 4: निर्माण के सोपानों को विस्तृत रूप में वर्णन कीजिए।

अभ्यास - 3.1

निम्नलिखित नापों द्वारा चतुर्भुज का निर्माण कीजिए और रचना लिखिए :

(a) चतुर्भुज ABCD में AB = 5.5 से.मी., BC = 3.5 से.मी., CD = 4 से.मी., AD = 5 से.मी. और $\angle A = 45^{o}$.

(b) चतुर्भुज BEST में BE = 2.9 से.मी., ES = 3.2 से.मी., ST = 2.7 से.मी., BT = 3.4 से.मी. और $\angle B = 75^{o}$.

(c) समानान्तर चतुर्भुज PQRS में PQ = 4.5 से.मी., QR = 3 से.मी., और $\angle PQR = 60^{o}$.

(d) समचतुर्भुज MATH में AT = 4 से.मी., $\angle MAT = 120^o$.

(e) आयत FLAT में FL = 5 से.मी., LA = 3 से.मी.

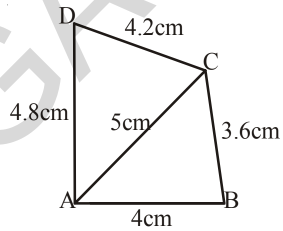
(f) वर्ग LUDO में LU = 4.5 से.मी.

3.2.2 निर्माण : जब चार भुजाओं की लंबाइयाँ और एक कर्ण दिया है। (S.S.S.S.D)

उदाहरण 3 : चतुर्भुज ABCD तैयार कीजिए जहाँ AB = 4 से.मी., BC = 3.6 से.मी., CD = 4.2 से.मी., AD = 4.8 से.मी. और AC = 5 से.मी.

हल :

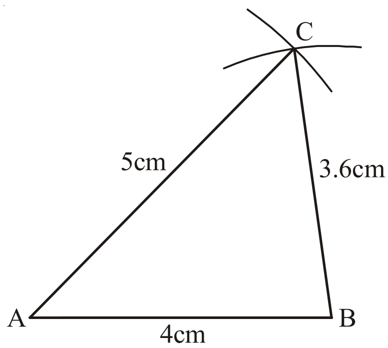
सोपान 1: दिए गए न्यांसो से चतुर्भुज ABCD का कच्चा रेखाचित्र बनाइए।



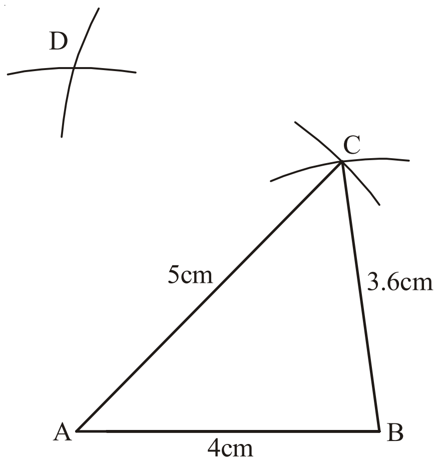
(चतुर्भुज बनाने के लिए दिये गए नाप पर्याप्त हैं या नहीं, विश्लेषण कीजिए।

यदि पर्याप्त हो तो आगे रेखाचित्र बनाइए और यदि न हो तो दी गयी आकृति खींचने के लिए व्यास पर्याप्त नहीं हैं, इसका निर्णय लीजिए।)

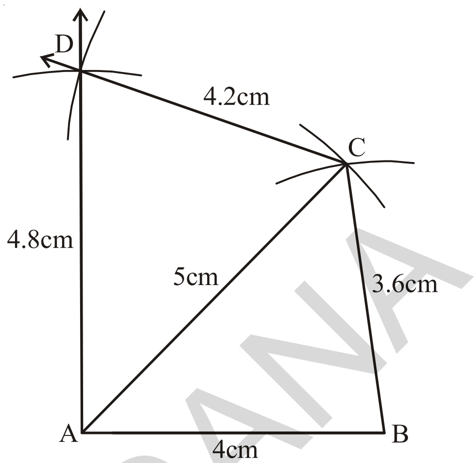
सोपान 2: ΔABC AB = 4 से.मी., BC = 3.6 से.मी. और AC = 5 से.मी. नापों की सहायता से ΔABC बनाइए।



सोपान 3: हमें चतुर्थ शीर्ष 'D' का स्थान निर्धारण करना है। यह AC के दुसरी ओर होगा। इसलिए A को केंद्र मानकर अर्धव्यास 4.8 से.मी. (AD = 4.8 से.मी.) लेकर एक चाप खींचिए। अब C को केंद्र मानकर और अर्धव्यास 4.2 से.मी. (CD = 4.2 से.मी.) और एक चाप खींचिए जो पहले चाप को D पर काटता है।



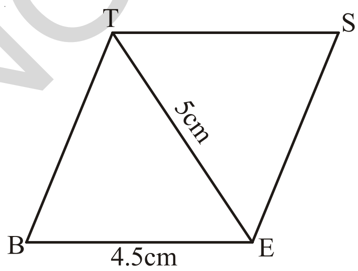
सोपान 4: चतुर्भुज ABCD पूर्ण करने के लिए A, D और C, D मिलाइए।



उदाहरण 4: समचतुर्भुज BEST बनाइए जहाँ BE = 4.5 से.मी. और ET = 5 से.मी.

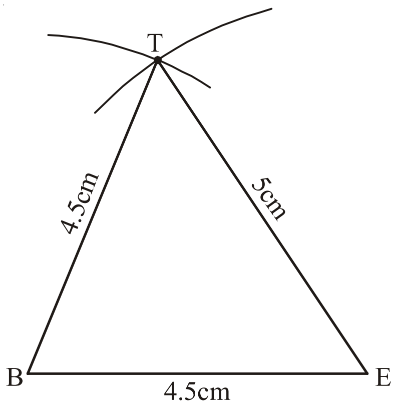
हल :

सोपान 1 : समचतुर्भुज (चतुर्भुज का विशेष प्रकार) का कच्चा रेखाचित्र बनाइए। चूँकि इसकी सभी भुजाएं समान होती हैं इसलिए BE = ES = ST = BT = 4.5 से.मी. और इसके दिये गये नापों को अंकित कीजिए।

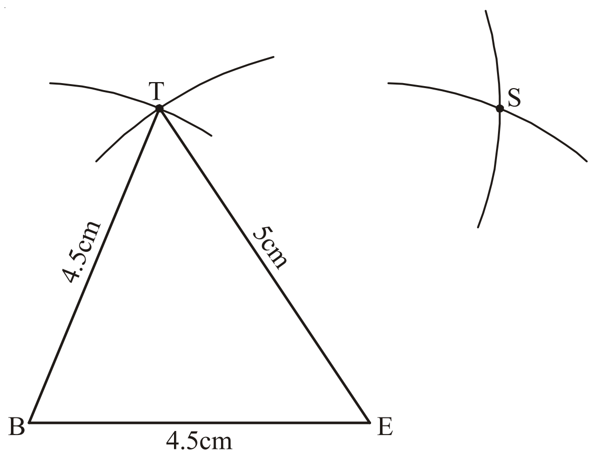


अब, इन नापों द्वारा हम आकृति का निर्माण कर सकते हैं।

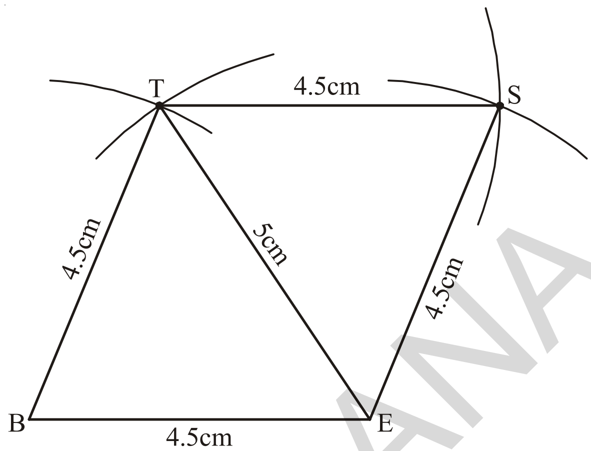
सोपान 2 : SSS गुण द्वारा ΔBET का निर्माण कीजिए जहाँ BE = 4.5 cm, ET = 5 से.मी. और BT = 4.5 से.मी.



सोपान 3 : शेष दो नाप ES = 4.5 से.मी. और ST = 4.5 से.मी. की सहायता से चाप खींचकर चतुर्थ शीर्ष 'S', का स्थान निर्धारण कीजिए।



सोपान 4 : अभीष्ट समचतुर्भुज BEST पूर्ण करने के लिए E, S और S, T मिलाइए।



प्रयत्न कीजिए :

1. क्या आप समानांतर चतुर्भुज BATS बना सकते हैं जहाँ BA = 5 से.मी., AT = 6 से.मी. और AS = 6.5 से.मी.? स्पष्ट कीजिए?
2. एक विद्यार्थी ने एक चतुर्भुज PLAY बनाने का प्रयत्न किया। दिया है कि PL = 3 से.मी., LA = 4 से.मी., AY = 4.5 से.मी., PY = 2 से.मी., LY = 6 से.मी. किन्तु वह इसे खींच नहीं सका। क्यों ?

   अपने आप चतुर्भुज बनाने प्रयत्न कीजिए। और कारण बताइए।

अभ्यास - 3.2

निम्नलिखित नापों के साथ चतुर्भुज निर्माण कीजिए :

(a) चतुर्भुज ABCD में AB = 4.5 से.मी., BC = 5.5 से.मी., CD = 4 से.मी., AD = 6 से.मी. और AC = 7 से.मी.

(b) चतुर्भुज PQRS में PQ = 3.5 से.मी., QR = 4 से.मी., RS = 5 से.मी., PS = 4.5 से.मी. और QS = 6.5 से.मी.

(c) समानान्तर चतुर्भुज ABCD में AB = 6 से.मी., AD = 4.5 से.मी., और BD = 7.5 से.मी.

(d) समचतुर्भुज NICE में NI = 4 से.मी. और IE = 5.6 से.मी.

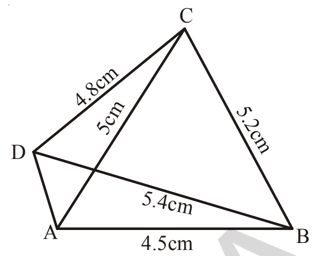
3.2.3 निर्माण: जब तीन भुजाएँ और दो कर्ण दिए हो (S.S.S.D.D)

उदाहरण 5 : चतुर्भुज ABCD बनाइए, दिया है कि AB = 4.5 से.मी., BC = 5.2 से.मी., CD = 4.8 से.मी., और कर्ण AC = 5 से.मी. और BD = 5.4 से.मी.

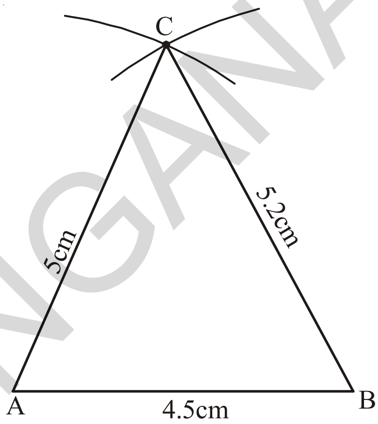
हल :

सोपान 1: प्रथम हम चतुर्भुज ABCD का कच्चा रेखाचित्र बनाते हैं। दिये गये नापों को अंकित कीजिए।

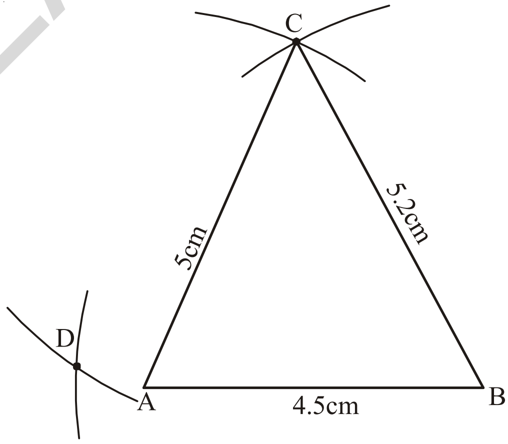
(उपलब्ध नापों से ΔABC बनाना संभव है।)



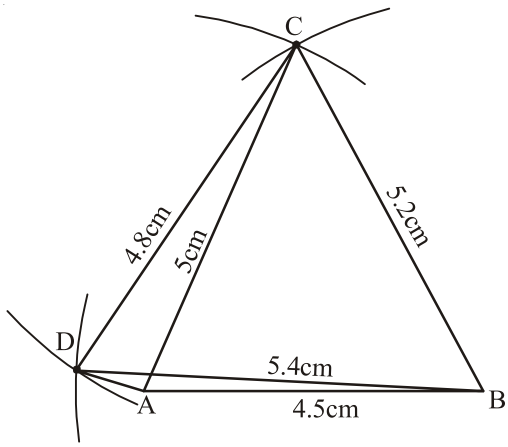
सोपान 2: निर्माण के SSS गुण का उपयोग करते हुए ΔABC बनाइए जहाँ AB = 4.5 से.मी., BC = 5.2 से.मी., और AC = 5 से.मी.



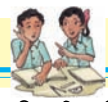
सोपान 3: केंद्र B और अर्धव्यास 5.4 से.मी. से और केंद्र C और अर्धव्यास 4.8 से.मी. दो चाप शीर्ष B के विपरीत खींचिए जो D का स्थान निर्धारण करते हैं।



सोपान 4: चतुर्भुज ABCD पूर्ण करने के लिए C,D, B,D और A,D मिलाइए।



सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए :



1. क्या तुम चतुर्भुज ABCD (ऊपर दिया हुआ) बना सकते हो जिसमें प्रथम ΔABD का निर्माण किया जाए, तथा बाद में चतुर्थ शीर्ष 'C' का। कारण दीजिए।
2. चतुर्भुज PQRS का निर्माण कीजिए जहाँ PQ = 3 से.मी., RS = 3 से.मी., PS = 7.5 से.मी., PR = 8 से.मी. और SQ = 4 से.मी. अपने उत्तर का औचित्य बताइए।

अभ्यास - 3.3

निम्नलिखित नापों से चतुर्भुज का निर्माण कीजिए :

(a) चतुर्भुज GOLD में OL = 7.5 से.मी., GL = 6 से.मी., LD = 5 से.मी., DG = 5.5 से.मी. और OD = 10 से.मी.

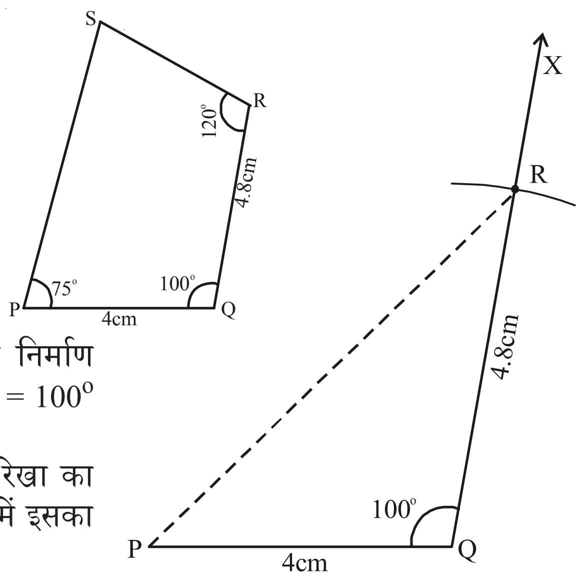
(b) चतुर्भुज PQRS PQ = 4.2 से.मी., QR = 3 से.मी., PS = 2.8 से.मी., PR = 4.5 से.मी. और QS = 5 से.मी.

3.2.4 निर्माण : जब दो आसन्न भुजाओं की लंबाइयाँ और तीन कोण ज्ञात हो (S.A.S.A.A)

हम पहले जैसा ही चतुर्भुज का निर्माण करेंगे लेकिन निर्माण में अधिक कोण शामिल है, इसलिए पटरी और परकार की सहायता से मानक कोण और शेष कोण चांदे की सहायता से बनाइए।

कोण $0^o, 30^o, 45^o, 60^o, 90^o, 120^o$ तथा 180^o मानक कोण कहलाते है।

उदाहरण 6 : चतुर्भुज PQRS, का निर्माण कीजिए, दिया है कि PQ = 4 से.मी., QR = 4.8 से.मी., $\angle P = 75^o$ $\angle Q = 100^o$ और $\angle R = 120^o$.



हल :

सोपान 1 : हम चतुर्भुज का कच्चा रेखाचित्र बनाते हैं और दिए गए नापों को अंकित करते हैं। कोण बनाने के लिए योग्य उपकरण का चयन कीजिए।

सोपान 2: निर्माण के SAS गुण द्वारा ΔPQR का निर्माण कीजिए। जहाँ PQ = 4 से.मी., $\angle Q = 100^o$ और QR = 4.8 से.मी.

(PR को मिलाने के लिए बिन्दु अंकित रेखा का उपयोग क्यों किया गया? अगले सोपान में इसका परिहार कर सकते है।)

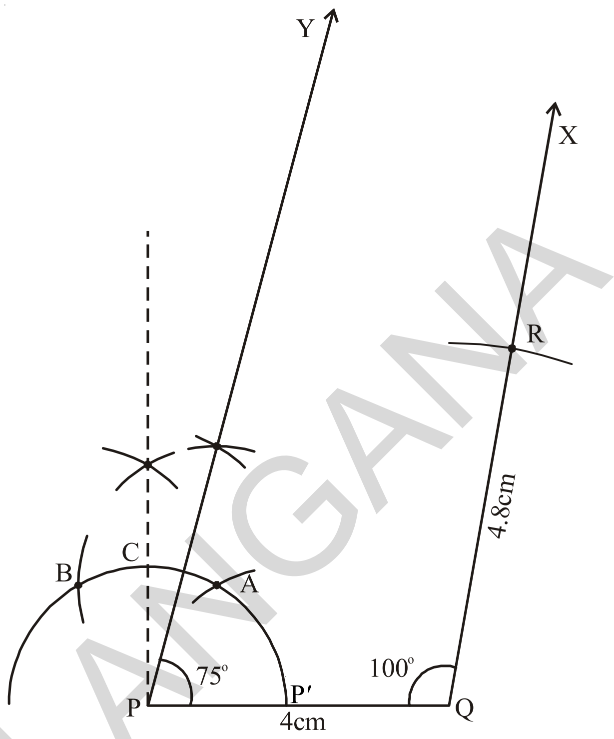
सोपान 3: $\angle P = 75^\circ$ बनाइए और $\overrightarrow{PY}$ खींचिए।

[क्या तुम जानते हो कैसे 75° कोण बनाया गया?

(a) P से एक चाप खींचे जो PQ को पर प्रतिच्छेद करती है। P′ को केंद्र मानकर उसी अर्धव्यास से दो चाप खींचे जो पहले चाप को A और B पर काटते हैं तथा 60° और 120° का कोण बनाते हैं।

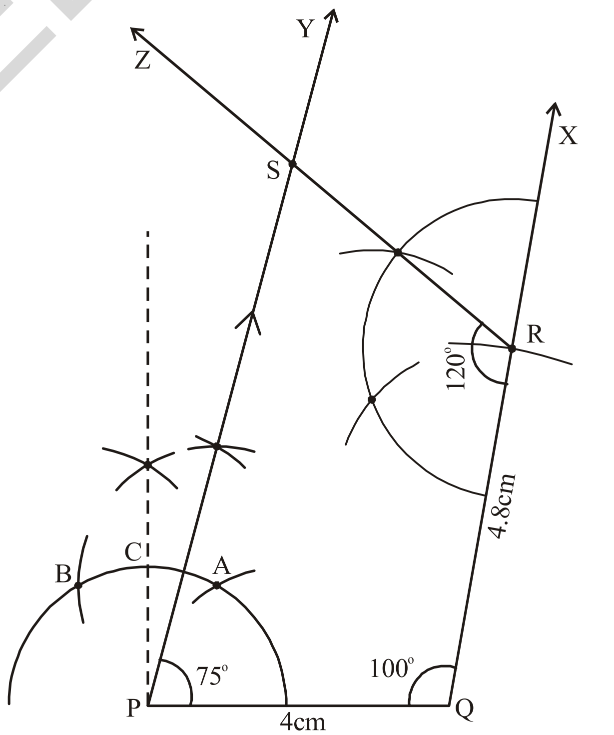
(b) A,B से कोण समद्विभाजक बनाइए जो चाप को 90° कोण बनाते हुए C, पर काटता है।

(c) A और C से कोण समद्विभाजक (60° और 90° की मध्यमा जो 75° है) बनाइए।]



सोपान 4: $\angle R = 120^\circ$ बनाइए और $\overrightarrow{RZ}$ जो $\overrightarrow{PY}$ को S पर काटती है।

PQRS यह अभीष्ट चतुर्भुज है।



सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए :

1. क्या तुम ऊपर दिया हुआ चतुर्भुज PQRS निर्माण कर सकते हो यदि P पर 75° के अलावा 100° का कोण हो? कारण दीजिए।
2. क्या तुम चतुर्भुज PLAN निर्माण कर सकते हो यदि PL = 6 से.मी., LA = 9.5 से.मी., $\angle P = 75^\circ$, $\angle L = 15^\circ$ और $\angle A = 140^\circ$.

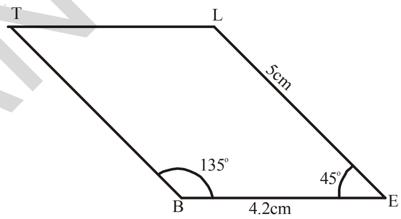
   (पहले प्रत्येक उदाहरण का एक कच्चा रेखाचित्र बनाइए और आकृति का विश्लेषण कीजिए।) तुम्हारे निर्णय के लिए कारण दीजिए।

उदाहरण 7 : समानान्तर चतुर्भुज BELT निर्माण कीजिए, दिया है कि BE = 4.2 से.मी., EL = 5 से.मी., $\angle T = 45^\circ$.

हल :

सोपान 1: समानांतर चतुर्भुज BELT का कच्चा रेखाचित्र बनाइए और दिये गए नापों को अंकित कीजिए।

(क्या वह निर्माण के लिए पर्याप्त है?)



विश्लेषण :

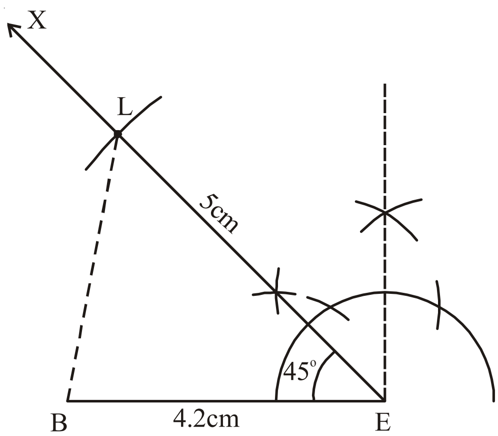
चूँकि दिए हुए नाप निर्माण के लिए पर्याप्त नहीं है, हम समानांतर चतुर्भुज के गुणों का उपयोग करते हुए आवश्यक नाप ज्ञात करेंगे।

जैसे "समानांतर चतुर्भुज में विपरीत कोण समान होते हैं।" इसलिए $\angle E = \angle T = 45^\circ$ और

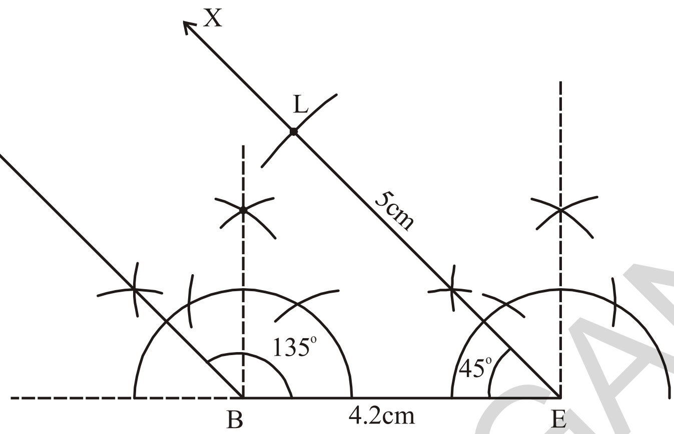
"क्रमागत कोण संपूरक होते हैं।" इसलिए $\angle L = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

इस प्रकार $\angle B = \angle L = 135^\circ$

सोपान 2 : निर्माण के SAS गुण का उपयोग करते हुए ΔBEL बनाइए जहाँ BE = 4.2 से.मी., $\angle E = 45^\circ$ और EL = 5 से.मी.

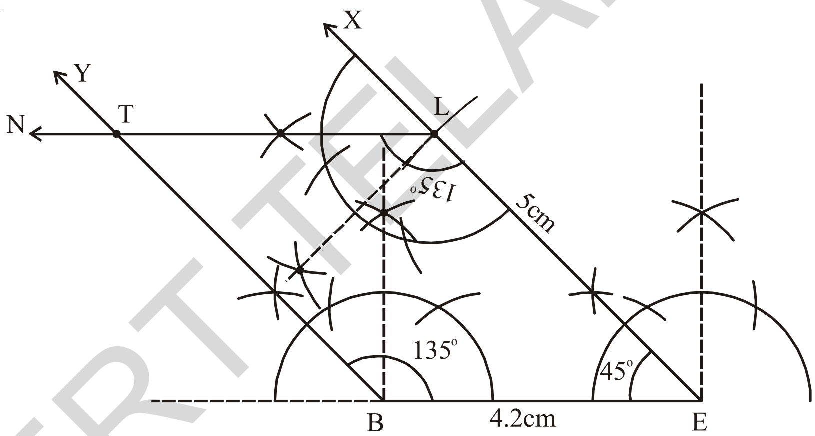


सोपान 3 : $\angle B = 135^o$ बनाइए और $\overrightarrow{BY}$ खींचिए।



सोपान 4 : $\angle L = 135^o$ बनाइए और $\overrightarrow{LN}$ खींचिए जो $\overrightarrow{BY}$ को T पर काटती है।

BELT यह अभीष्ट चतुर्भुज (अर्थात समानांतर चतुर्भुज) है।



यह कीजिए।
ऊपर दिया हुआ समानांतर चतुर्भुज BELT, समानांतर चतुर्भुज के दूसरे गुणों का उपयोग करते हुए बनाइए।

अभ्यास - 3.4

निम्नलिखित नापों के साथ चतुर्भुज बनाइए :

(a) चतुर्भुज HELP में HE = 6 से.मी., EL = 4.5 से.मी., $\angle H = 60^o$, $\angle E = 105^o$ और $\angle P = 120^o$.

(b) समानांतर चतुर्भुज GRAM में GR = AM = 5 से.मी., RA = MG = 6.2 से.मी. और $\angle R = 85^o$

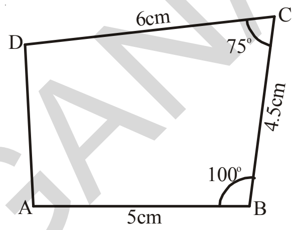
(c) आयत FLAG में भुजाएँ FL = 6 से.मी. और LA = 4.2 से.मी.

3.2.5 निर्माण : जब तीन भुजाओं की लम्बाइयों और इन के बीच के दो कोण दिये हों (S.A.S.A.S)

हम इस प्रकार का चतुर्भुज, SAS गुण की सहायता से त्रिभुज बनाते हुए, निर्माण करते हैं। विशेष रूप से सम्मिलित कोणों की ओर ध्यान दीजिए।

उदाहरण 8 : चतुर्भुज ABCD का निर्माण कीजिए जिसमें AB = 5 से.मी., BC = 4.5 से.मी., CD = 6 से.मी., $\angle B = 100^o$ और $\angle C = 75^o$.

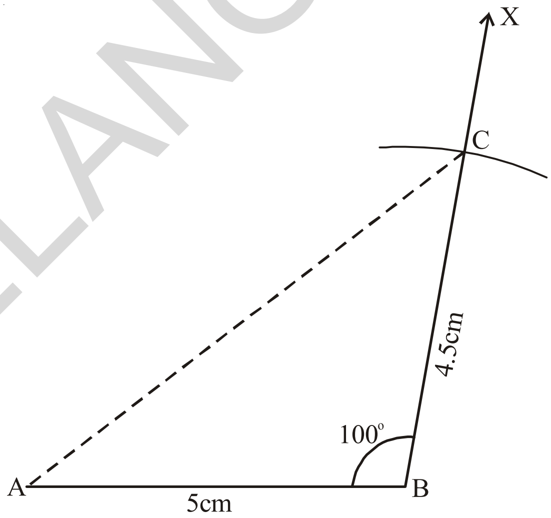
हल :



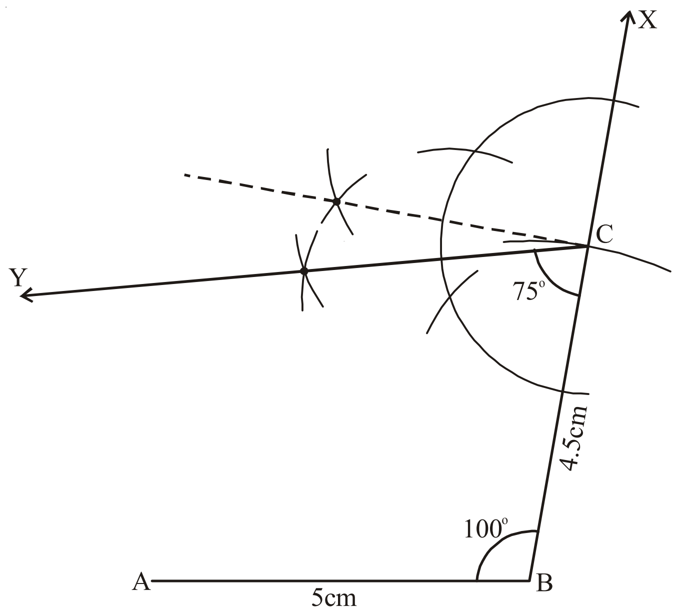
सोपान 1 : चतुर्भुज का कच्चा रेखाचित्र बनाइए और दिये गये नापों के अनुसार अंकित कीजिए।

(चतुर्भुज का निर्माण करने के लिए दिये गये नाप पर्याप्त हैं या नही, ज्ञात कीजिए। यदि पर्याप्त हों तो आगे बढ़िये।)

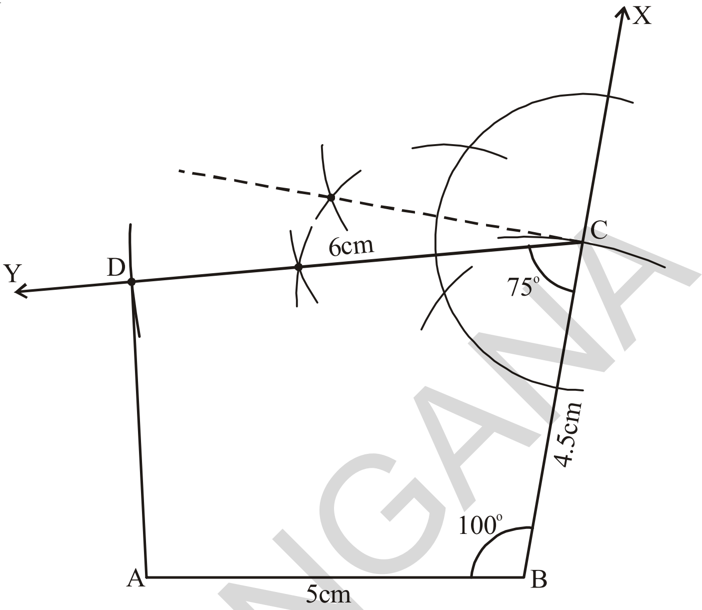
सोपान 2 : SAS नियम का उपयोग करते हुए AB= 5 से.मी., $\angle B = 100^o$ और BC = 4.5 से.मी. नापों से ΔABC बनाइए।



सोपान 3 : $\angle C = 75^o$ बनाइए और $\overline{CY}$ खींचिए।



सोपान 4 : 'C' को केन्द्र मानकर 6 से.मी. अर्धव्यास से एक चाप खींचिए जो $\overline{CY}$ को D पर प्रतिच्छेद करता है। A, D मिलाइए। ABCD यह अभीष्ट चतुर्भुज है।



सोचिये, चर्चा कीजिए और लिखिए :

क्या तुम ऊपर दिया हुए चतुर्भुज ABCD बना सकते है जिसमें आधार AB के अलावा BC ? यदि हाँ, कच्चा रेखाचित्र बनाइए और निर्माण में सम्मिलित भिन्न सोपानों को स्पष्ट कीजिए।

अभ्यास - 3.5

निम्नलिखित चतुर्भुजों का निर्माण कीजिए :

(a) चतुर्भुज PQRS में PQ = 3.6 से.मी., QR = 4.5 से.मी., RS = 5.6 से.मी., $\angle PQR = 135^o$ और $\angle QRS = 60^o$.

(b) चतुर्भुज LAMP में AM = MP = PL = 5 से.मी., $\angle M = 90^o$ और $\angle P = 60^o$.

(c) समलंब चतुर्भुज ABCD में AB || CD, AB = 8 से.मी., BC = 6 से.मी., CD = 4 से.मी. और $\angle B = 60^o$.

3.2.6 विशेष प्रकार के चतुर्भुजों का निर्माण :

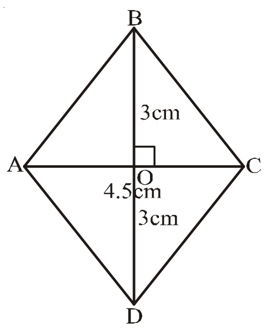
(a) समचतुर्भुज का निर्माण :

उदाहरण 9 : समचतुर्भुज ABCD बनाईए जिसमें कर्ण AC = 4.5 से.मी.और BD = 6 से.मी.

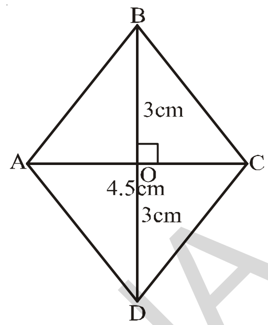
हल :

सोपान 1 : समचतुर्भुज ABCD का कच्चा रेखाचित्र बनाइए और दिये गये नापों से इसे अंकित कीजिए। क्या ये नाप अभीष्ट समचतुर्भुज के निर्माण के लिए पर्याप्त है?

इसे परखने के लिए, हम समचतुर्भुज के एक या दो गुणों का उपयोग, इसके निर्माण के लिए करेंगे।



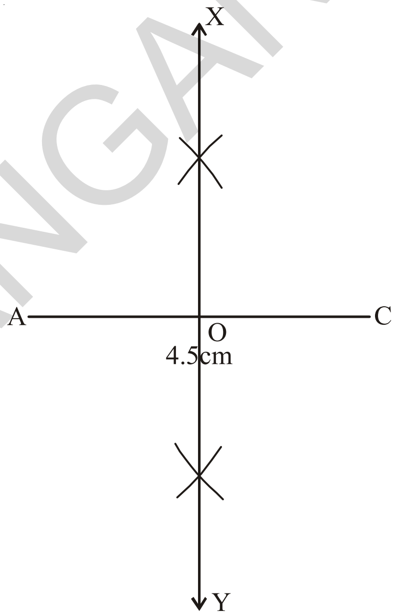
विश्लेषण: समचतुर्भुज के कर्ण एक दूसरे को लंबकोण में काटते हैं। समचतुर्भुज ABCD के $\overline{AC}$ और $\overline{BD}$ कर्ण हैं जो 'O' पर एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं। अर्थात $\angle AOB = 90^o$ और



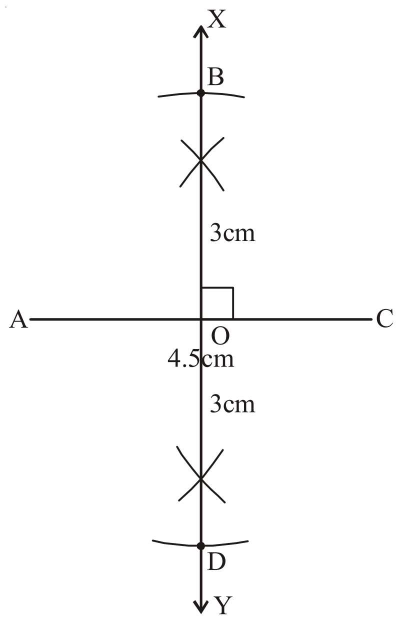
$$OB = OD = \frac{BD}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ से.मी.}$$

अब निर्माण के लिए सोपान 2 की ओर आगे बढ़िए।

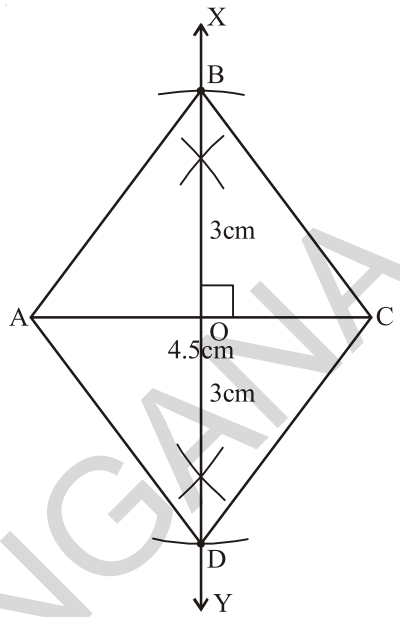
सोपान 2: $\overline{AC}$ = 4.5 से.मी. (समचतुर्भुज ABCD का एक कर्ण) खींचिए और इसका लम्बसमद्विभाजक $\overline{XY}$ खींचिए। प्रतिच्छेद बिंदु को 'O' नाम दीजिए।



सोपान 3: चूँकि दूसरा कर्ण $\overline{BD}$, कर्ण $\overline{AC}$ को लम्ब है, यह $\overline{XY}$ का भाग है। इसलिए 'O' को केंद्र मानकर और अर्धव्यास 3 से.मी. (OB = OD = 3 से.मी.) लेते हुए दो चाप खींचिए जो $\overline{AC}$ के दोनो ओर $\overline{XY}$ को B और D पर काटते है।



सोपान 4: (i) A, B (ii) B, C (iii) C, D और (iv) D, A मिलाइए जिससे समचतुर्भुज पूर्ण हुआ।



सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए :

1. क्या आप ऊपर का चतुर्भुज (समचतुर्भुज) AC के अलावा BD को आधार मानते हुए बना सकते हैं? यदि नहीं तो कारण दीजिए।
2. माना कि इस समचतुर्भुज के दोनों कर्ण लंबाई में बराबर है तो तुम कौन-सी आकृति प्राप्त करोगे?

   इसके लिए कच्चा रेखाचित्र बनाइए। कारण बताइए।

अभ्यास - 3.6

निम्नलिखित नापों के लिए चतुर्भुज बनाइए :

(a) समचतुर्भुज CART जहाँ CR = 6 से.मी., AT = 4.8 से.मी.

(b) समचतुर्भुज SOAP जहाँ SA = 4.3 से.मी., OP = 5 से.मी.

(c) वर्ग JUMP जहाँ कर्ण 4.2 से.मी.

हमने क्या समझा है?

1. एक अद्वितीय चतुर्भुज बनाने के लिए 5 स्वतंत्र नापों की आवश्यकता रहती है।
2. एक चतुर्भुज अद्वितीय रूप से निर्माण कर सकते है, यदि
   (a) चार भुजाओं की लम्बाइयाँ और एक कोण दिया हो
   (b) चार भुजाओं की लम्बाइयाँ और एक कर्ण दिया हो
   (c) तीन भुजाओं की लम्बाइयाँ और दो कर्ण दिए हो
   (d) दो आसन्न भुजाओं की लम्बाइयाँ और तीन कोण दिए हो
   (e) तीन भुजाओं की लम्बाइयाँ और दो अंतर्गत कोण दिए हो
3. दो विशेष चतुर्भुज, जिनके नाम समचतुर्भुज और वर्ग है, का निर्माण कर सकते है जब दो कर्ण दिए हो।

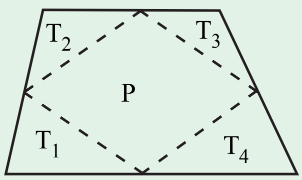
अध्यापक के लिए सूचना :

परकार का उपयोग करते हुए बनाए गये कोण यथार्थ रहते हैं और तार्किक रूप से सिद्ध कर सकते है, जहाँ कोण नापने के लिए जाँचने के लिए चांदे उपयोग कर सकते है। इसलिए विद्यार्थी सभी संभव कोण प्रकार की सहायता से बनाना सिखे।

पेपर कटिंग का आमोद

एक कागज लीजिए। उसे एक चतुर्भुजाकार में ऐसे काटिए कि उसके प्रत्येक कोण 180^o से कम हों। इसकी भुजाओं के मध्य बिंदु दर्शाइए। फिर सभी मध्य बिंदुओं को चित्र में दिखाए अनुसार जोड़ते हुए रेखा खींचिए। उस कागज को इस रेखा पर से काट दीजिए। आप को चार त्रिभुज T_1, T_2, T_3, T_4 और एक समांतर चतुर्भुज P प्राप्त होंगे। दर्शाइए कि ये चारों त्रिभुज चतुर्भुज को ढँक लेंगे।

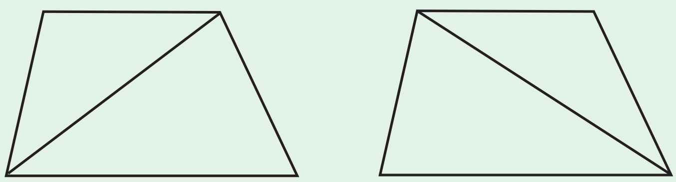
आप समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल और मूल चतुर्भुज के क्षेत्रफल की तुलना किस प्रकार कर सकते हैं?



केवल आनंद के लिए।

चतुर्भुज + चतुर्भुज = समांतर चतुर्भुज?

एक कागज को आधे से मोड़िए और कैंची की सहायता से दो सर्वांगसम सममित चतुर्भुज काटिए। बनाइए। एक चतुर्भुज को उसके एक कर्ण से और दूसरे चतुर्भुज को उसके दूसरे कर्ण से काटिए। दर्शाइए कि इन चारों त्रिभुजों से किस प्रकार एक समांतर चतुर्भुज बनाया जा सकता है?



अध्याय 4

घात और घातांक (EXPONENTS AND POWERS)

4.0 परिचय

हम जानते हैं कि $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^6$ और

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(m बार)} = 3^m$$

दिए गए उदाहरणों को देखिए।

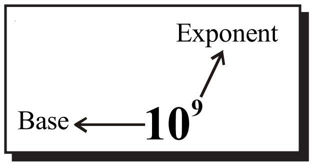
सूर्य का अनुमानित व्यास 1,40,00,00,000 मी. और

सूरज का द्रव्यमान 1, 989, 100, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000 कि.ग्रा.

सूर्य से धरती तक की दूरी 149, 600, 000, 000 मी. है। अनुमान लगाया गया है कि ब्रह्मांड की आयु लगभग 12,000,000,000 वर्ष है। पृथ्वी लगभग 1,353,000,000 घन कि.मी. समुद्री जल से घिरी है।

शतरंज का प्रत्येक बॉक्स अनाज के दानों से भरा है। पहले बॉक्स में एक अनाज का दाना है। दूसरे बॉक्सों में अनाज इस प्रकार से रखा गया है कि वह अपने पहले बॉक्स के दोगुना हों। क्या आप जानते हैं कि शतरंज के सभी 64 बॉक्सों को भरने के लिए कितने अनाज के दाने चाहिए? उत्तर है- 18,446,744,073,709,551,615.

क्या आपको ऐसी बड़ी संख्याओं को पढ़ना, लिखना और समझना कठिन नहीं लगता है? याद कीजिए कि हमने इन संख्याओं को घातांकों का प्रयोग करके कैसे लिखा था?



1,40,00,00,000 मी. $= 1.4 \times 10^9$ मी.

हम 10^9 को '10 के घात में 9' कहकर पढ़ते हैं।

इसे कीजिए।

1. हल कीजिए।

   (i) $3^7 \times 3^3$ (ii) $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$ (iii) $3^4 \times 4^3$

2. नई दिल्ली से हैदराबाद की दूरी रेल से 1674.9 कि.मी. है। इसे आप से.मी. में किस प्रकार व्यक्त करेंगे? इसे घातांक के रूप में लिखिए।

4.1 ऋणात्मक घातांकों का घात

साधारणतया हम लिखते हैं कि

सूर्य का व्यास = 1400000000 मी. = 1.4×10^9 मी.

अवगेड्रो संख्या = 6.023×10^{23}

ये संख्याएँ बहुत बड़ी हैं। लेकिन इन्हें हम इस प्रकार सरल रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

लेकिन यदि हम बहुत छोटी अर्थात इकाई से भी बहुत छोटी संख्याओं को लिखना चाहें तो, उदाहरणतः

बाल की मोटाई = 0.000005 मी.

सूक्ष्म परत की मोटाई = 0.000015 मी.

आइए पता लगाएँ कि इकाई से बहुत छोटी संख्याओं को किस प्रकार सरलता से व्यक्त किया जाए।

आइए पहले सीखे गए पैटर्न याद करें-

> घातांक में 1 कम करें तो संख्या का मान पहले के मान से एक-दहाई $(\frac{1}{10})$ घटता है।

$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$

$10^2 = 10 \times 10 = 100 = 1000/10$

$10^1 = 10 = 100/10$

$10^0 = 1 = 10/10$

$10^{-1} = ?$

उपर्युक्त आधार पर हम कह सकते हैं कि $10^{-1} = \frac{1}{10}$

इस प्रकार $10^{-2} = \frac{1}{10} \div 10 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$

$10^{-3} = \frac{1}{100} \div 10 = \frac{1}{100} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$

ऊपर दिखाए अनुसार हम लिख सकते हैं- $\frac{1}{10^n} = 10^{-n}$ *or* $\frac{1}{10^{-n}} = 10^n$

निम्नलिखित तालिका देखिए।

1 किलोमीटर	1 हेक्टोमीटर	1 टेकामीटर	1 मीटर	1 डेसीमीटर	1 सेंटीमीटर	1 मिली मीटर
1000 मी.	100 मी.	10 मी.	1 मी.	$\frac{1}{10}$ मी.	$\frac{1}{100}$ मी.	$\frac{1}{1000}$ मी.
10^3 मी.	10^2 मी.	10^1 मी.	10^0 मी.	10^{-1}मी.	10^{-2} मी.	10^{-3} मी.

इसे कीजिए।

10^{-10} के समान क्या होगा ?

यह पैटर्न देखिए-

(i) $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

(ii) $\frac{8}{2} = 4 = 2 \times 2 = 2^2$

(iii) $\frac{4}{2} = 2 = 2^1$

(iv) $\frac{2}{2} = 1 = 2^0$

(v) $\frac{1}{2} = 2^{-1}$

(vi) $\frac{1}{2^2} = 2^{-2}$

सामान्यतः हम कह सकते हैं कि शून्येतर परिमेय संख्या 'a' के लिए $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, जो कि a^m का गुणात्मक प्रतिलोम है।

क्योंकि $a^m \times a^{-m} = a^{m+(-m)} = a^0 = 1$

इसे कीजिए।

निम्न के गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

(i) 3^{-5} (ii) 4^{-3} (iii) 7^{-4} (iv) 7^{-3}

(v) x^{-n} (vi) $\frac{1}{4^3}$ (vii) $\frac{1}{10^3}$

इसे देखिए!

हम जानते हैं वेग = $\frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$

इसे संकेतों में इस लिखते हैं, $s = \frac{d}{t}$. यदि दूरी मीटर (**m**) में और समय सेकेंड (**s**) में दिया गया हो तो वेग के लिए मात्रक लिखा जायेगा- $\mathbf{m} \times \mathbf{s}^{-1}$. त्वरण के लिए मात्रक होगा- $\frac{m}{s^2}$.

इसे $\mathbf{m} \times \mathbf{s}^{-2}$ प्रकार भी लिखते हैं।

हम 3456 संख्या को विस्तारित रूप में इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं-

$$3456 = (3 \times 1000) + (4 \times 100) + (5 \times 10) + (6 \times 1)$$
$$3456 = (3 \times 10^3) + (4 \times 10^2) + (5 \times 10) + (6 \times 10^0)$$

इसी प्रकार $7405 = (7 \times 10^3) + (4 \times 10^2) + (0 \times 10) + (5 \times 10^0)$

आइए देखें कि दशमलव संख्याओं का विस्तारित रूप घातांकों का प्रयोग करते हुए कैसे लिखते हैं- यह संख्या लें- 326.57

(हम जानते हैं- $\frac{1}{10} = 10^{-1}$ & $\frac{1}{10^2} = 10^{-2}$)

$$326.57 = (3 \times 10^2) + (2 \times 10) + (6 \times 10^0) + \left(\frac{5}{10}\right) + \left(\frac{7}{10^2}\right)$$
$$= (3 \times 10^2) + (2 \times 10) + (6 \times 10^0) + (5 \times 10^{-1}) + (7 \times 10^{-2})$$

इसे भी $734.684 = (7 \times 10^2) + (3 \times 10) + (4 \times 10^0) + \left(\frac{6}{10}\right) + \left(\frac{8}{10^2}\right) + \left(\frac{4}{10^3}\right)$

$$= (7 \times 10^2) + (3 \times 10) + (4 \times 10^0) + (6 \times 10^{-1}) + (8 \times 10^{-2}) + (4 \times 10^{-3})$$

इसे कीजिए।

इन संख्याओं का घातांकों का प्रयोग करते हुए विस्तारित रूप लिखिए।

(i) 543.67 (ii) 7054.243 (iii) 6540.305 (iv) 6523.450

4.2 घातांक के नियम

हमने सीखा है कि शून्येतर परिमेय संख्या 'a', $a^m \times a^n = a^{m+n}$; जहाँ 'm' और 'n' प्राकृतिक संख्याएँ हैं।

क्या यह नियम ऋणात्मक घातांकों पर भी लागू होगा?

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ शून्येतर परिमेय संख्या 'a' के लिए

आइए, जाँच करें

(i) यह लें $3^2 \times 3^{-4}$

हम जानते हैं- $3^{-4} = \frac{1}{3^4}$

(हम जानते है की, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$)

इसलिए $3^2 \times 3^{-4} = 3^2 \times \frac{1}{3^4} = \frac{3^2}{3^4}$

$$= 3^{2-4} = 3^{-2}$$

i.e., $3^2 \times 3^{-4} = 3^{-2}$

(ii) इसे लीजिए $(-2)^{-3} \times (-2)^{-4}$

$$(-2)^{-3} \times (-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^3} \times \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{(-2)^{3+4}}$$

$$= \frac{1}{(-2)^7} = (-2)^{-7} \quad (\because a^m \times a^n = a^{m+n})$$

इसलिए $(-2)^{-3} \times (-2)^{-4} = (-2)^{-7}$

(iii) अब इसे देखिए $(-5)^2 \times (-5)^{-5}$

$$(-5)^2 \times (-5)^{-5} = (-5)^2 \times \frac{1}{(-5)^5}$$

$$= \frac{1}{(-5)^{5-2}} = \frac{1}{(-5)^3} \quad \left(\text{But } \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}\right)$$

$$= (-5)^{-3} \quad \left(\because \frac{1}{a^m} = a^{-m}\right)$$

इसलिए $(-5)^2 \times (-5)^{-5} = (-5)^{-3}$ (हम जानते हैं $2+(-5) = -3$)

सान्यतया हम कह सकते हैं कि किसी भी शून्येतर परिमेय संख्या 'a' के लिए $a^m \times a^n = a^{m+n}$; जहाँ 'm' और 'n' भी परिमेय संख्या हैं।

इसे कीजिए।

घातांक रूप को सरल कीजिए और लिखिए।

(i) $2^{-3} \times 2^{-2}$ (ii) $7^{-2} \times 7^5$ (iii) $3^4 \times 3^{-5}$ (iv) $7^5 \times 7^{-4} \times 7^{-6}$

(v) $m^5 \times m^{-10}$ (vi) $(-5)^{-3} \times (-5)^{-4}$

इसी प्रकार, निम्न घातांक नियमों को भी सत्यापित कर सकते हैं जहाँ 'a' और 'b' शून्येतर परिमेय संख्याएँ हैं और 'm' और 'n' कोई पूर्णांक हैं।

1. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $(a^m \times b^m) = (ab)^m$

इन नियमों को हम पिछली कक्षा में धनात्मक घातांक में भी सीख चुके हैं।

4. $\dfrac{a^m}{b^m}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^m$

5. $a^0 = 1$

क्या आपको 'm' और 'n' के संबंधों में कोई समानता दिखी, यदि $a^m = a^n$ जहाँ 'a' एक शून्येतर परिमेय संख्या है और $a \neq 1, a \neq -1$. आइए देखें

क्यों $a \neq 1$?
यदि a = 1, m = 7 और n= 6
तो $1^7 = 1^6$
$\Rightarrow 7 = 6$
क्या यह सही है?
अतः $a \neq 1$
यदि a = –1 तो क्या होगा?

मान लीजिए $a^m = a^n$ तो $\dfrac{a^m}{a^n} = 1$ (दोनों ओर a^n से भाग देने पर)

$$a^{m-n} = 1. \quad a^{m-n} = a^0$$

$$\therefore m - n = 0$$

$$\therefore m = n$$

तो हम कह सकते हैं कि यदि $a^m = a^n$ तो $m = n$.

उदाहरण 1: मान ज्ञात कीजिए (i) 5^{-2} (ii) $\dfrac{1}{2^{-5}}$ (iii) $(-5)^2$

हल : (i) $5^{-2} = \dfrac{1}{(5)^2} = \dfrac{1}{5\times 5} = \dfrac{1}{25}$ (हम जानते हैं $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$)

(ii) $\dfrac{1}{2^{-5}} = 2^5 = 2\times 2\times 2\times 2\times 2$ (हम जानते हैं $\dfrac{1}{a^{-m}} = a^m$)

$2^5 = 32$

(iii) $(-5)^2 = (-5)(-5) = 25$

उदाहरण 2 : सरल कीजिए।

(i) $(-5)^4 \times (-5)^{-6}$ (ii) $\dfrac{4^7}{4^4}$ (iii) $\left(\dfrac{3^5}{3^3}\right)^5 \times 3^{-6}$

हल : (i) $(-5)^4 \times (-5)^{-6}$ (हम जानते हैं $a^m \times a^n = a^{m+n}$)

$= (-5)^{4+(-6)} = (-5)^{-2}$

$= \dfrac{1}{(-5)^2} = \dfrac{1}{(-5)\times(-5)} = \dfrac{1}{25}$ (हम जानते हैं $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$)

(ii) $\dfrac{4^7}{4^4}$ (हम जानते हैं $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$)

$= 4^{7-4} = 4^3 = 64$

(iii) $\left(\dfrac{3^5}{3^3}\right)^5 \times 3^{-6}$

$= (3^{5-3})^5 \times 3^{-6}$ (हम जानते हैं $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$)

$= (3^2)^5 \times 3^{-6}$ $(a^m)^n = a^{mn}$

$= 3^{10} \times 3^{-6} = 3^4 = 81$

उदाहरण 3: प्रत्येक को धनात्मक घातांक के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) 4^{-7} (ii) $\dfrac{1}{(5)^{-4}}$ (iii) $\left(\dfrac{4}{7}\right)^{-3}$ (iv) $\dfrac{7^{-4}}{7^{-6}}$

हल : (i) 4^{-7} (हम जानते हैं $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$)

$= \dfrac{1}{(4)^7}$

(ii) $\dfrac{1}{(5)^{-4}}$

$= 5^4$

(हम जानते हैं $\dfrac{1}{a^{-m}} = a^m$)

(iii) $\left(\dfrac{4}{7}\right)^{-3} = \dfrac{4^{-3}}{7^{-3}}$ $\left(a^{-m} = \dfrac{1}{a^m} \text{ and } a^m = \dfrac{1}{a^{-m}}\right)$

$= \dfrac{7^3}{4^3} = \left(\dfrac{7}{4}\right)^3$

सामान्यत: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^m$

(iv) $\dfrac{7^{-4}}{7^{-6}}$

$= 7^{-4-(-6)}$

$= 7^{-4+6} = 7^2$

उदाहरण 4 : 27^{-4} को 3 को आधार बनाकर घात के साथ लिखिए।

हल : 27 को लिखा जा सकता है $3 \times 3 \times 3 = 3^3$

इसलिए $27^{-4} = (3^3)^{-4}$

$= 3^{-12}$ हम जानते हैं $(a^m)^n = a^{mn}$

उदाहरण 5 : सरल कीजिए।

(i) $\left(\frac{1}{27}\right)\times 2^{-3}$ (ii) $4^4 \times 16^{-2} \times 4^0$

हल : (i) $\left(\frac{1}{27}\right)\times 2^{-3}$

27 को इस प्रकार लिखा जा सकता है- $3 \times 3 \times 3 = 3^3$

$$\left(\frac{1}{27}\right)\times 2^{-3} = \frac{1}{3^3}\times 2^{-3}$$

$= \frac{1}{3^3}\times\frac{1}{2^3}$ हम जानते हैं $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$

$= \frac{1}{(3\times 2)^3}$ हम जानते हैं $a^m \times b^m = (ab)^m$

$= \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$

(ii) $4^4 \times 16^{-2} \times 4^0$

$= 4^4 \times (4^2)^{-2} \times 4^0$ हम जानते हैं $(a^m)^n = a^{mn}$

$= 4^4 \times 4^{-4} \times 4^0$ हम जानते हैं $a^m \times a^n = a^{m+n}$

$= 4^{4-4+0} = 4^0$ लेकिन $a^0 = 1$

$=1$

उदाहरण 6: क्या आप 'x' के मान के बारे में अनुमान लगा सकते हैं जब $2^x = 1$

हल : जैसा कि हम पहले भी चर्चा कर चुके हैं कि $a^0 = 1$

जी, हाँ, $2^x = 1$

$2^x = 2^0$

$\Rightarrow x = 0$

उदाहरण 7 : 'x' का मान ज्ञात कीजिए यदि

(i) $25 \times 5^x = 5^8$ (ii) $\frac{1}{49} \times 7^{2x} = 7^8$

(iii) $(3^6)^4 = 3^{12x}$ (iv) $(-2)^{x+1} \times (-2)^7 = (-2)^{12}$

हल :

$25 \times 5^x = 5^8$ हम जानते हैं $25 = 5 \times 5 = 5^2$

$5^2 \times 5^x = 5^8$ लेकिन $a^m \times a^n = a^{m+n}$

$5^{2+x} = 5^8$ यदि $a^m = a^n \Rightarrow m = n$

$2 + x = 8$

$\therefore x = 6$

(ii) $\frac{1}{49} \times 7^{2x} = 7^8$

$\frac{1}{7^2} \times 7^{2x} = 7^8$ हम जानते हैं $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$

$7^{-2} \times 7^{2x} = 7^8$

$7^{2x-2} = 7^8$

$2x - 2 = 8$ (इनके आधार समान है)

$2x = 8 + 2$

$2x = 10$

$x = \frac{10}{2} = 5$

$\therefore x = 5$

(iii) $(3^6)^4 = 3^{12x}$ $[\therefore (a^m)^n = a^{mn}]$

$3^{24} = 3^{12x}$ (इनके आधार समान है)

$24 = 12x$

$x = \frac{24}{12} = 2$

(iv) $(-2)^{x+1} \times (-2)^7 = (-2)^{12}$

$(-2)^{x+1+7} = (-2)^{12}$

$(-2)^{x+8} = (-2)^{12}$ (इनके आधार समान है)

$x + 8 = 12$

$x = 12 - 8 = 4$

उदाहरण 8 : सरल कीजिए $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \times \left(\frac{25}{4}\right)^{-2}$

हल : $\frac{25}{4} = \frac{5 \times 5}{2 \times 2} = \frac{5^2}{2^2}$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \times \left(\frac{25}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \times \left(\frac{5^2}{2^2}\right)^{-2}$$

लेकिन $(a^m)^n = a^{mn}$

$$= \frac{5^3}{2^3} \times \frac{2^4}{5^4} = 5^{3-4} \times 2^{4-3}$$

जैसे $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$ और $\frac{1}{a^{-m}} = a^m$

$$= 5^{-1} \times 2^1 = \frac{2}{5}$$

उदाहरण 9 : सरल कीजिए $\left[\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \div \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right\}\right]$

हल : $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \div \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right]$

हम जानते हैं $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

$$= \left[\left(\frac{1^{-3}}{3^{-3}} - \frac{1^{-3}}{2^{-3}}\right) \div \frac{1^{-2}}{5^{-2}}\right]$$

हम जानते हैं $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ और $a^m = \frac{1}{a^{-m}}$

$$= \left[\left(\frac{3^3}{1^3} - \frac{2^3}{1^3}\right) \div \frac{5^2}{1^2}\right] = \left(\frac{27}{1} - \frac{8}{1}\right) \div 25$$

$$= (27 - 8) \div 25 = \frac{19}{25}$$

उदाहरण 10 : यदि $x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$ तो x^{-2} का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$

हम जानते हैं $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

$$x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{2^{-4}}{3^{-4}}$$

$$x = \frac{3^2}{2^2} \times \frac{3^4}{2^4} = \frac{3^{2+4}}{2^{2+4}} = \frac{3^6}{2^6} = \left(\frac{3}{2}\right)^6$$

$$x = \left(\frac{3}{2}\right)^6$$

$$x^{-2} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^6\right]^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-12} = \frac{3^{-12}}{2^{-12}} = \frac{2^{12}}{3^{12}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{12}$$

अभ्यास - 4.1

1. सरल कीजिए और कारण लिखिए।

   (i) 4^{-3} (ii) $(-2)^7$ (iii) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$ (iv) $(-3)^{-4}$

2. सरल कीजिए और एक घातांक के रूप में लिखिए।

   (i) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6$ (ii) $(-2)^7 \times (-2)^3 \times (-2)^4$

   (iii) $4^4 \times \left(\frac{5}{4}\right)^4$ (iv) $\left(\frac{5^{-4}}{5^{-6}}\right) \times 5^3$ (v) $(-3)^4 \times 7^4$

3. सरल कीजिए (i) $2^2 \times \frac{3^2}{2^{-2}} \times 3^{-1}$ (ii) $(4^{-1} \times 3^{-1}) \div 6^{-1}$

4. सरल कीजिए और कारण बताइए।

   (i) $(4^0 + 5^{-1}) \times 5^2 \times \frac{1}{3}$ (ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$

   (iii) $(2^{-1} + 3^{-1} + 4^{-1}) \times \frac{3}{4}$ (iv) $\frac{3^{-2}}{3} \times (3^0 - 3^{-1})$

   (v) $1 + 2^{-1} + 3^{-1} + 4^0$ (vi) $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\right]^2$

5. सरल कीजिए और कारण बताइए (i) $\left[(3^2-2^2)\div\frac{1}{5}\right]^2$ (ii) $((5^2)^3\times5^4)\div5^6$

6. प्रत्येक में 'n' का मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^5=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$

(ii) $(-3)^{n+1}\times(-3)^5=(-3)^{-4}$

(iii) $7^{2n+1}\div49=7^3$

7. 'x' का मान ज्ञात कीजिए यदि $2^{-3}=\frac{1}{2^x}$

8. सरल कीजिए $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}\div\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}\right]\times\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$

9. यदि $m=3$ और $n=2$ तो इनका मान ज्ञात कीजिए।
(i) $9m^2-10n^3$ (ii) $2m^2n^2$ (iii) $2m^3+3n^2-5m^2n$ (iv) m^n-n^m

10. सरल कीजिए और कारण बताइए $\left(\frac{4}{7}\right)^{-5}\times\left(\frac{7}{4}\right)^{-7}$

4.3 घातांक नियम और संख्याओं को मानक रूप में प्रस्तुत करना

पिछली कक्षा में हम बड़ी संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त करने के बारे में सीख चुके हैं।

उदाहरणतः $300{,}000{,}000m=3\times10^8m$

अब बहुत छोटी संख्या को मानक रूप में प्रस्तुत करने का प्रयास कीजिए।

ध्यान दीजिए, कंप्यूटर चिप की एक तार का व्यास 0.000003 मी. है।

$$0.000003 \text{ मी.} = \frac{3}{1000000} \text{ मी.}$$

$$= \frac{3}{10^6} \text{ मी.}$$

$$= 3\times10^{-6} \text{ मी.}$$

इसलिए $0.000003 = 3\times10^{-6}$ मी.

इसी प्रकार किसी पौधे की कोशिका का आकार जो 0.00001275 मी. है

$$0.00001275 \text{ मी.} = \frac{1275}{100000000} \text{ मी.}$$

$$= 1.275 \times \frac{10^3}{10^8} \text{ मी.}$$

$$= 1.275 \times 10^{-5} \text{ मी.}$$

प्रयत्न कीजिए।

1. इन संख्याओं को मानक रूप में लिखकर कथन फिर से लिखिए।
   (i) सूर्य से पृथ्वी तक की दूरी 149,600,000,000 मी. है।
   (ii) सूर्य की औसत त्रिज्या लगभग 695000 कि.मी. है।
   (iii) मानव के बाल की मोटाई का परिसर 0.08 मी.मी से 0.012 मी.मी. है।
   (iv) माउंट एवरेस्ट की ऊँचाई 8848 मी.
2. इन संख्याओं को मानक रूप में लिखिए।
   (i) 0.0000456 (ii) 0.000000529 (iii) 0.0000000085
   (iv) 6020000000 (v) 35400000000 (vi) 0.000437×10^4

4.4 बहुत बड़ी और बहुत छोटी संख्याओं की तुलना

हम जानते हैं कि सूर्य का व्यास 14000000000 मी. और पृथ्वी का व्यास 12750000 मी. है। यदि हम जानना चाहते हैं कि सूर्य, पृथ्वी से कितना बड़ा है, तो हमें सूर्य के व्यास को पृथ्वी के व्यास से भाग देना होगा।

$$\text{अत:} \frac{14000000000}{12750000}$$

क्या आपको यह ज्ञात करना कठिन है? यदि हम इन व्यासों को मानक रूप में लिखें तो हमारे लिए बताना सरल होगा कि सूर्य पृथ्वी से कितना बड़ा है। आइए देखें-

सूर्य का व्यास = 1400000000 मी. = 1.4×10^9 मी.

पृथ्वी का व्यास = 12750000 = 1.275×10^7 मी.

अत:

$$\frac{\text{सूर्य का व्यास}}{\text{पृथ्वी का व्यास}} = \frac{1.4 \times 10^2 \times 10^7}{1.275 \times 10^7} = \frac{1.4 \times 10^2}{1.275}$$

$$= 10^2 = 100 \quad \text{(लगभग)}$$

अतः सूर्य का व्यास, पृथ्वी के व्यास का लगभग 100 गुना है।

अतः सूर्य, पृथ्वी से लगभग सौ गुना बड़ा है

आइए और एक उदाहरण देखें

पृथ्वी का द्रव्यमान 5.97×10^{24} कि.ग्रा. है और चंद्रमा का द्रव्यमान 7.35×10^{22} कि.ग्रा. इन दोनों का कुल द्रव्यमान क्या होगा?

पृथ्वी का द्रव्यमान $= 5.97 \times 10^{24}$ कि.ग्रा.

चंद्रमा का द्रव्यमान $= 7.35 \times 10^{22}$ कि.ग्रा.

कुल द्रव्यमान $= 5.97 \times 10^{24}$ Kg $+ 7.35 \times 10^{22}$ कि.ग्रा.

$= (5.97 \times 10^{2} \times 10^{22}$ Kg$) + 7.35 \times 10^{22}$ कि.ग्रा.

$= (5.97 \times 10^{2} + 7.35) \times 10^{22}$ कि.ग्रा.

$= (597 + 7.35) \times 10^{22}$ कि.ग्रा.

$= 604.35 \times 10^{22}$ कि.ग्रा.

$= 6.0435 \times 10^{24}$ कि.ग्रा.

> जब हम मानक रूप में लिखी संख्याओं को जोड़ते हैं तब हम इन्हें समान घातांक के रूप में बदलते हैं।

उदाहरण 11 : इन्हें मानक रूप में लिखिए।

(i) 4.67×10^{4} (ii) 1.0001×10^{9} (iii) 3.02×10^{-6}

हल :

(i) $4.67 \times 10^{4} = 4.67 \times 10000 = 46700$

(ii) $1.0001 \times 10^{9} = 1.0001 \times 1000000000 = 1000100000$

(iii) $3.02 \times 10^{-6} = 3.02/10^{6} = 3.02/1000000 = 0.00000302$

अभ्यास - 4.2

1. इन संख्याओं को मानक रूप में लिखिए।

   (i) 0.000000000947 (ii) 543000000000

   (iii) 48300000 (iv) 0.00009298 (v) 0.0000529

2. इन संख्याओं को सामान्य रूप में लिखिए।

   (i) 4.37×10^{5} (ii) 5.8×10^{7} (iii) 32.5×10^{-4} (iv) 3.71529×10^{7}

   (v) 3789×10^{-5} (vi) 24.36×10^{-3}

3. निम्नलिखित सूचनाओं को मानकरूप में लिखिए।

   (i) बैकिटरिया का आकार 0.0000004 मी.

   (ii) लाल रक्त कोशिकाओं का आकार 0.000007 मि.मी.

(iii) प्रकाश का वेग 300000000 मी./सेकेंड

(iv) पृथ्वी और चंद्रमा के बीच की दूरी 384467000 मी.

(v) एक इलेक्ट्रान का आवेश 0.000000000000000016 कुलंब होता है।

(vi) कागज के टुकड़े की मोटाई 0.0016 से.मी.

(vii) कंप्यूटर चिप के एक तार की मोटाई 0.000005 से.मी.

4. एक ढेर में पाँच किताबें है जिनमें प्रत्येक की मोटाई 20 मि.मी. तथा पाँच कागज़ की शीटें हैं जिनमें प्रत्येक की मोटाई 0.016 मि.मी. है। इस ढेर की कुल मोटाई ज्ञात कीजिए।

5. राकेश ने घातांकों के कुछ सवाल नीचे दिखाए अनुसार हल किये। क्या आप इनसे सहमत हैं? यदि नहीं तो क्यों? अपने मत को सिद्ध कीजिए।

(i) $x^{-3} \times x^{-2} = x^{-6}$ (ii) $\frac{x^3}{x^2} = x^4$ (iii) $(x^2)^3 = x^{2^3} = x^8$

(iv) $x^{-2} = \sqrt{x}$ (v) $3x^{-1} = \frac{1}{3x}$

परियोजना कार्य :

दसवीं कक्षा तक की पाठ्यपुस्तकों में से कोई पाँच अत्यंत छोटी संख्याओं के तथ्य ढूँढ़िए और लिखिए। उन्हें ऋणात्मक घातांकों का प्रयोग करते हुए लिखिए।

हमने क्या चर्चा की?

1. ऋणात्मक घातांकों वाली संख्याएँ निम्न नियमों का पालन करती हैं।

(a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (b) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$ (c) $(a^m)^n = a^{mn}$

(c) $a^m \times b^m = (ab)^m$ (d) $a^0 = 1$ (e) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

2. ऋणात्मक घातांकों का उपयोग करते हुए बहुत छोटी संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

3. बहुत बड़ी एवं बहुत छोटी संख्याओं की तुलना।

4. सामान्य त्रुटियों को पहचानना।

अध्याय **5**

समानुपात से राशियों की तुलना
(COMPARING QUANTITIES USING PROPORTIONS)

5.1 परिचय

अपने दैनिक जीवन के कार्य करने समय हमें कई राशियों की तुलना करने की आवश्यकता होती है। हमने अनुपात और प्रतिशत का उपयोग राशियों की तुलना के लिये किया है। निम्न उदाहरण पर ध्यान दीजिये।

40 विद्यार्थी की एक कक्षा के नेता के लिये मतदान का आयोजनः स्निग्धा 24 मतों से कथा की पहली नेता बनी और सिरी 16 मतों से दूसरी नेता बनी। इसलिए स्निग्धा तथा सिरी के मतों का अनुपात 24:16 रहा। इसको न्यूनतम रूप में लिखने पर अनुपात क्या होगा? 3:2 होगा। सिरी और स्निग्धी का विलोमानुपात 2:3 होगा। अनुपात को आप क्या कहते हैं ?

दो राशियों की क्रमबद्ध तुलना अनुपात कहलाता है।

प्रयत्न करें :

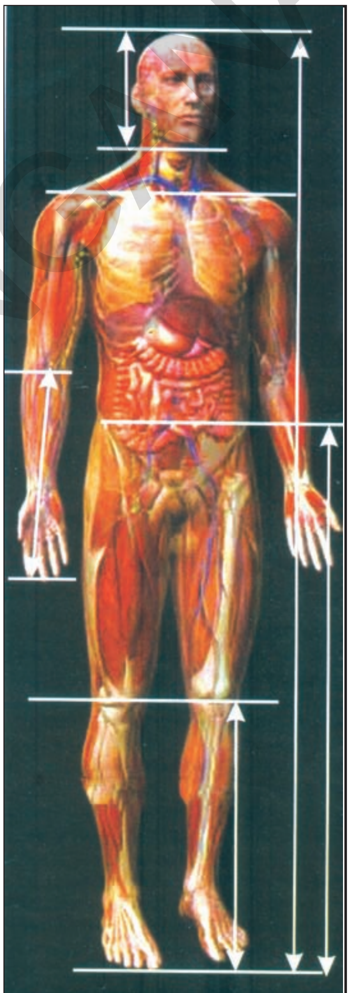
1. आपकी साइकल के गेयर का अनुपात ज्ञात करो।

   पैडल पर के दाँतों की गिनती कीजिये और पीछे के पहिये के दाँतों की संख्या की गिनती कीजिये।

   चेन के पहिये के दाँतों की संख्या : पीछे के पहिये के दाँतों की संख्या

   इसे गेर की अनुपात कहते हैं। चेन पहिये के प्रत्येक घूर्णन में छोटे पहिये के घूमाव की संख्या नोट कीजिए ।

2. समाचार पत्रों से प्रतिशत से सम्बंधित पाँच स्थितियों के उदाहरण काट लीजिये।



मानव शरीर का सुनहरा अनुपात

इस सुनहरे अनुपात से मनुष्य नहीं बच सका अर्थात अपना शरीर इस दैविक समानुपात का सबसे उचित उदाहरण है।

निम्न पर ध्यान दे:

- ऊँचाई: नाभि और पैर के बीच की लम्बाई।
- भुजाओं की लम्बाई : सिर की लम्बाई
- उँगली तथा कोहनी के बीच की लम्बाई: कलाई और कोहनी के बीच लम्बाई।
- नाभि तथा पैर और के बीच लम्बाई : घुटने और पैर के बीच लम्बाई।

1.615:1 is Golden ratio.

गुणित समानुपात (Compound Proportion)

कभी-कभी हमें दो अनुपातों को एक अनुपात के रूप में प्रस्तुत करना पड़ता है, क्यों? इसे समझने के लिए हम निम्न उदाहरण को समझने की ओर ध्यान देंगे?

रामय्या और गोहपालम ने ₹ 2000 और ₹ 3000 की मूल राशि से एक व्यापार आरम्भ किया। वर्ष के अंत में वे दोनों अपना वार्षिक लाभ किस अनुपात में विभाजित करेंगे?

मूल राशि का अनुपात = 2000: 3000

= 2: 3

वार्षिक मूल राशि नीचे दी गयी है।

मास	जनवरी	फरवरी	मार्च	अप्रैल	मई	जून	जुलाई	अगस्त	सितंबर	अक्टूबर	नवंबर	दिसंबर	कु.यो
रामय्या का भाग	₹											₹	24
गोपालम का भाग		₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	36

भागों का अनुपात = 24: 36

= 2: 3 और समय का अनुपात = 1:1

आप क्या निरीक्षण करेंगे? मूल राशि का अनुपात, भागों के अनुपात के समान है, जब समय समान हो। इसलिए वे दोनों अपना वार्षिक लाभ उनके भागों के अनुपात में विभाजित करेंगे, जो 2:3 है।

ऊपर्युक्त उदाहरण में

पहली स्थिति : रामय्या और गोपालम ने समान राशि ₹5000 से व्यापार आरम्भ किया। रामय्या एक वर्ष के लिये परन्तु गोपाल ने 9 माह के लिए। वे अपना लाभ कैसे विभाजित करेंगे? क्या आप चाहेंगे कि उन्होंने समान राशि से व्यापार आरंभ किया था, इसलिए उनका लाभ भी समान होना चाहिए?

मूलराशि का अनुपात = 5000: 5000 = 1:1

मास	जनवरी	फरवरी	मार्च	अप्रैल	मई	जून	जुलाई	अगस्त	सितंबर	अक्टूबर	नवंबर	दिसंबर	कुल भाग
राशिया का भाग	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	12
गोपालम का भाग	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	-	-	-	9

भागों का अनुपात = 12: 9 = 4:3 और समय का अनुपात = 12: 9 = 4: 3

उनकी मूल राशि समान है। अत: वे लाभ भी बराबर भागों में बाँट लेंगे अर्थात समय के अनुपात में

दूसरी स्थिति : मान लीजिए रामय्या ने 12 माह के लिए ₹ 2000 की मूल राशि लगाई और गोपालम ने 9 माह के लिए ₹ 3000 की राशि लगाई तो वार्षिक लाभ को वे किस अनुपात में विभाजित करेंगे? क्या वह मूल राशि का अनुपात होगा या समय का अनुपात होगा? रामय्या ने ज्यादा समय के लिए कम मूल राशि लगाई लेकिन गोपालम ने कम समय के लिए अधिक लगाई। यहाँ पर हमें दोनों के समय तथा मूल राशियों पर ध्यान देना आवश्यक है। यह हम कैसे करेंगे?

मूल राशि का अनुपात = 2000: 3000 = 2:3

समय का अनुपात = 12: 9 = 4:3

मास	जनवरी	फरवरी	मार्च	अप्रैल	मई	जून	जुलाई	अगस्त	सितंबर	अक्टूबर	नवंबर	दिसंबर	कुल भाग
रामय्या का भाग	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	24
गोपालम का भाग	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	-	-	-	27

भागों का अनुपात = 24 : 27 = 8 : 9

= (2 × 12) : (3 × 9) = 8 : 9 (उपर्युक्त तालिका देखिए)

यहाँ पर मूल राशि का अनुपात 2:3 है और समय का अनुपात 4 : 3 है। इसलिए भागों का अनुपात (2 × 12) : (3 × 9) = 8 : 9. इसलिए यह उनका वार्षिक लाभ 8 : 9 के अनुपात में कोई संबंध है?

भागों का अनुपात इस तरह लिखा जा सकता है 8 : 9 = 2 : 3 और 4 : 3
2 : 3 और 4 : 3.

बाह्य पदों का गुणनफल   मध्य पदों का गुणनफल

दो सामान्य अनुपातों को एक अनुपात में व्यक्त किया जा सकता है।

बाह्य पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल। इसको गुणित अनुपात कहते हैं। यह अनुपातों को उनके भिन्नों से गुणित करने पर प्राप्त होता है। और इसको इस तरह लिखा जाता है।

यदि a : b और c : d ये भिन्न अनुपात हैं तो उनका गुणित अनुपात $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ अर्थात ac: bd.

प्रयत्न कीजिए।

1. निम्न के गुणित अनुपात ज्ञात कीजिए :
   (a) 3 : 4 और 2 : 3   (b) 4 : 5 और 4 : 5   (c) 5 : 7 और 2 : 9
2. गुणित अनुपात के दैनिक जीवन में आने वाले उदाहरण दीजिए।

प्रतिशत (Percentage) :

निम्न उदाहरण पर ध्यान दीजिए।

एम.के. नगर के उन्नत पाठशाला के छात्रों ने एक चारिटी शो के टिकट बेचने का निर्णय लिया। आठवीं कक्षा के छात्र 300 टिकट और सातवीं कक्षा के छात्र 250 टिकट थे। शो के एक घंटे पहले आठवीं कक्षा ने 225 टिकट और सातवीं कक्षा ने 200 टिकट बेचे।

किस कक्षा के छात्र अपना निश्चित काम पूर्ण करने के अधिक निकट हैं?

यह मालूम करने के लिए आप उनके अनुपातों की तुलना कर सकते हैं। जैसे 225:300 और 200:250. आठवीं कक्षा के लिए 3:4 और सातवीं कक्षा के लिए 4:5 है। क्या आप तुलना करके बता सकते हैं? यह कठिन है क्योंकि इसका सही अर्थ नहीं निकलता और हम इसे सीधा-सीधा नहीं बना सकते हैं। हमें उन दोनों के समान अनुपातों की आवश्यकता होती है।

राशियों की तुलना करने की एक पद्धति है उनको प्रतिशत में बदलना। प्रतिशत एक संख्या को 100 से तुलना करता है। प्रतिशत का अर्थ है- सौ में से क्या प्रति सैकड़ा 100% = $\frac{100}{100}$. यह एक भिन्न है जिसका हर हमेशा 100 रहता है।

आठवीं कक्षा के छात्रों द्वारा बेचे गये टिकट का प्रतिशत $\frac{3}{4} \times \frac{100}{100} = \frac{75}{100} = 75\%$

सातवीं कक्षा के छात्रों द्वारा बेचे गये टिकट का प्रतिशत $= \frac{4}{5} \times \frac{100}{100} = \frac{80}{100} = 80\%$

इससे हम यह समझते हैं कि सातवीं कक्षा अपने निश्चित उद्देश्य को पूरा करने के अधिक निकट हैं। 100 से संख्याओं का भाग, प्रतिशत कहलाता है। इसलिए उसका हर 100 बन जाता है जिसके लिए

हम दोनों (अंश और हर) को 100 से गुणा करते हैं।

हम प्रतिशत को एक सामान्य माप की तरह उपयोग कर सकते हैं।

आरंभ के भाग में, हमने स्निग्धा और सिरी के मतों की तुलना अनुपात द्वारा की थी। इसी को हम

स्निग्धा को मिले मतो की संख्या 40 में से 24 या 5 में से 3 है।

इसलिए मतों का प्रतिशत

$\frac{3}{5} \times 100\% = 60\%$

दूसरी विधि से

40 मतों में से स्निग्धा के मत 24 हैं।

इसलिए 100 मतों में से स्निग्धा के मत $= \frac{24}{40} \times 100 = 60$

100 मतों में से स्निग्धा के मत 60 हैं।

इसलिए उसके मतों का प्रतिशत $= 60\%$

क्योंकि सभी छात्रों ने मतदान किया है,

स्निग्धा के मतों का प्रतिशत + सिरी के मतों का प्रतिशत = 100%

60% + सिरी के मतों का प्रतिशत = 100%

इसलिए सिरी के मतों का प्रतिशत = 100% – 60% = 40%

5.2 अधिकतम और न्यूनतम प्रतिशत ज्ञात करना :

निम्न स्थिति पर ध्यान दीजिए।

- कया का परिमाण 10% अधिक हुआ।
- घरों के मूल्य में 12% गिरावट आई है।
- वर्ष 2020 तक CO_2 के निष्कासन में 25% की कमी आनी चाहिए।

राशियों के अंतर को अक्सर मूल राशि के प्रतिशत में व्यक्त किया जाता है।

प्रतिशत के बढ़त और खपत के प्रश्नों को हल करने के लिए दो विभिन्न पद्धतियों का उपयोग किया जाता है।

यह समझने के लिये निम्न उदाहरण को समझने का प्रयत्न करेंगे।

(1) एक व्यापारी ने अपने व्यक्ति को पिछले माह की बिक्री की तुलना में 35% बिक्री बढ़ाने के लिए कहा। यदि पिछले माह की बिक्री ₹ 98,700 हो तो उसने वर्तमान महीने के लिए कितनी बिक्री करने

पिछले माह की बिक्री = ₹ 98,700.

98,700 का 35% $= \frac{35}{100} \times 98,700$

= ₹ 34545

वर्तमान माह की बिक्री का लक्ष्य

= ₹ 98,700 + 34,545

= ₹1, 33, 245.

इकाई पद्धति

35% की बढ़त का अर्थ है,

₹ 100 से ₹135 तक

तो ₹ 98,700 में कतने की वृद्धि होगी?

वर्तमान की बिक्री का लक्ष्य = ₹ $\frac{135}{100} \times 98,700$

= ₹ 1,33,245.

(2) जूतों का अंकित मूल्य ₹ 550 है। यदि वे 10% कटौती करके बेचे जाते हैं तो उनका नया विक्रय मूल्य क्या है?

जूतों का मूल्य = ₹ 550.

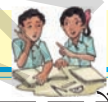
कटौती = ₹ 550 का 10%

$$= \frac{10}{100} \times 550 = ₹55.$$

क्या मूल्य = अंकित मूल्य - कटौती

= ₹550 – ₹55 = ₹ 495.

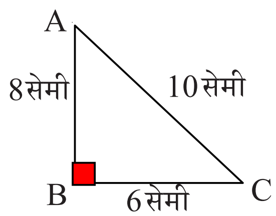
सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए।



1. एक संख्या का दोगुना उसको 100% बढ़ा देता है। यदि हम उस संख्या में आधा कम कर दें तो कितने प्रतिशत की कमी आएगी?
2. ₹ 2400 से ₹ 2000 कितना प्रतिशत कम है? क्या वह उतना ही प्रतिशत कम है जितना कि ₹ 2000 से ₹ 2400 अधिक है?

अभ्यास - 5.1

1. निम्न का अनुपात ज्ञात कीजिए।
   (i) एक कार्यालय में स्मिता 6 घंटे कार्य करती है और काजल 8 घंटे काम करती है। उनके कार्य के समय का अनुपात ज्ञात कीजिए।
   (ii) एक बर्तन में 8 लीटर दूध है जबकि दूसरे में 750 मि.ली.
   (iii) साइकल की गति 15 किमी/घंटा है और स्कूटर की गति 30 कि.मी./घंटा है।
2. यदि 5:8 और 3:7 का गुणिन अनुपात 45 : x है तो x का मूल्य ज्ञात कीजिए।
3. यदि 7:5 और 8:x का गुणित अनुपात 84 : 60 है तो x को ज्ञात कीजिए।
4. यदि 3:4 और 4:5 का गुणित अनुपात 45:x हो तो x ज्ञात कीजिए।
5. एक प्राथमिक पाठशाला में 60 छात्रों के लिए 3 अध्यापक रहेंगे। यदि 400 छात्र हैं तो कितने अध्यापक होने चाहिए?
6. दिये चित्र में ABC एक त्रिभुज है। इसकी भुजाओं की जोड़ियों के नापों से सभी संभव अनुपात लिखिए।



7. 24 में से 9 छात्रों ने एक परीक्षा में 75% से कम अंक प्राप्त किये। 75% अंक से कम तथा 75% से अधिक प्राप्त करने वाले छात्रों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

8. 'MISSISSIPPI' शब्द में स्वर और व्यंजन के अनुपात का सरल रूप लिखिए।

9. राजेन्द्र और रेहाना एक व्यापार के मालिक हैं। प्रतिमाह रेहाना को लाभ का 25% प्राप्त होता है। यदि रेहाना को रु.2080 प्राप्त हुए तो उसका कुल लाभ कितना होगा?

10. एक त्रिभुज ABC, में AB = 2.2 से.मी., BC = 1.5 से.मी. और AC = 2.3 से.मी. है। त्रिभुज XYZ, में XY = 4.4 से.मी., YZ = 3 से.मी. और XZ = 4.6 से.मी., AB : XY, BC : YZ, AC : XZ का अनुपात ज्ञात कीजिए। क्या ΔABC और ΔXYZ की संगत भुजाएँ समानुपात में हैं?
[संकेतः दो त्रिभुज समानुपात में हैं यदि उनकी संगत भुजाएँ उसी अनुपात में हों।]

11. माधुरी एक सूपर-मार्केट में गई। वहाँ पर मूल्यों में अंतर इस प्रकार है। चावल का मूल्य 5% कम है। अमरूद और फल का दाम 8% कम है और तेल तथा दाल का दाम 10% अधिक है। परिवर्तित दाम को जानने में माधुरी की मदद कीजिए।

वस्तु	अंकित मूल्य	परिवर्तित मूल्य
चावल	रु. 30	
जॉम	रु.100	
सेब	रु.280	
तेल	रु.120	
दाल	रु. 80	

12. पिछले वर्ष 2075 लोगों ने एक क्लब के सदस्य बने। इस वर्ष उसमें 4% गिरावट आई।
(a) कितनी संख्या कम हुई।
(b) इस वर्ष और कितने लोग क्लब के सदस्य बने?

13. पिछले वर्ष एक किसान के खेत में 1720 थैले रुई की उपज़ हुई। इस वर्ष उसे अपनी उपज में 20% की बढ़त होने की आशंका है। इस वर्ष उसे कितने अधिक थैले प्राप्त होंगे?

14. **P और Q एक रेखाखण्ड AB पर हैं। P बिन्दु AB को 2 : 3 अनुपात में विभाजित करता है और Q बिन्दु को 3 : 4 अनुपात में। यदि PQ = 2, तो AB की लम्बाई ज्ञात कीजिये ?**

5.3 कटौती को पहचानना (Discounts)

हम बड़े दुकानों तथा सूपर-मार्केटों में वस्तुओं पर उनका मूल्य छपा हुआ देखते हैं। क्या आप जानते हैं कि उन्हें क्या कहते हैं? यह **(M.R.P.)** कहा जाता है। वस्तुओं के कारखाने से निकलते समय ही इनपर एम.आर.पी. अंकित कर दिया जाता है।

रवि एक पुस्तक खरीदने दुकान गया। उस पुस्तक पर एम.आर.पी. ₹ 80 है। लेकिन दुकानदार ने उस पर 15% की छूट दी। रवि ने उस पुस्तक की कितनी कीमत दी?

दैनिक जीवन में हम ऐसी कई परिस्थितियों का सामना करते हैं जहाँ वस्तुओं के मूल्यों पर कटौती दी जाती है।

कटौती को रिबेट भी कहते हैं। यह अंकित मूल्य पर दिया जाता है इसे सूची मूल्य भी कहते हैं।

अब उपर्युक्त उदाहरण में रवि को 15% छूट दी गई थी। यदि एम.आर.पी. ₹ 80 है तो फिर कटौती

$\frac{15}{100} \times 80 =$ ₹ 12. होगी। इसलिए रवि रु.80 – ₹ 12 = ₹ 68 देगा।

हम कुछ और उदाहरण देखेंगे।

उदाहरण:1 एक साइकल का अंकित मूल्य ₹ 3600 है और वह ₹ 3312 में बेची गई। कटौती और कटौती % ज्ञात कीजिए।

हल: कटौती = अंकित मूल्य - विक्रय मूल्य

= ₹ 3600 – ₹ 3312 = ₹ 288

क्योंकि कटौती अंकित मूल्य पर की जाती है, इसलिए जब कटौती का प्रतिशत ज्ञात किया जाता है तब अंकित मूल्य को आधार की तरह उपयोग कहते हैं।

₹ 3600 अंकित मूल्य पर ₹ 288 कटौती है

₹100 अंकित मूल्य पर कितनी कटौती होगी ?

कटौती प्रतिशत $= \frac{288}{3600} \times 100 = 8\%$

हम, कटौती प्रतिशत देने पर कटौती ज्ञात कर सकते हैं।

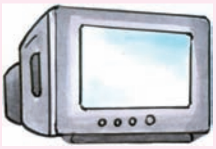
उदाहरण:2 एक सीलिंग पंखा का एम.आर.पी. ₹ 1600 है और दुकानदार उस पर 6% कटौती देता है। वह पंखा कितने में बिकेगा?

हल:

राजू ने इस तरह हल किया	लता ने इसको इस तरह हल किया
कटौती = ₹ 100 का 6%	6% की कटौती का अर्थ है
$= \frac{6}{100} \times 1600 =$ ₹96	₹ 100 से 6 की कमी अर्थात ₹ 94
विक्रय मूल्य = अंकित मूल्य - कटौती	तो ₹ 1600 में 6% की कमी
= ₹ 1600 – ₹ 96	विक्रय मूल्य $= \frac{94}{100} \times 1600 =$ ₹1504
= ₹1504.	

प्रयत्न कीजिए।

1. विक्रय मूल्य को रिक्त स्थान में भरिए :

वस्तु	अंकित मूल्य (₹)	कटौती %	विक्रय मूल्य (₹)
	450	7%	
	560	9%	
	250	5%	
	15000	15%	

उदाहरण: 3 नीलिमा ने एक दुकान से फ्राक खरीदा। उस ड्रेस का मूल्य ₹ 1000 है। दुकानदार ने उस पर पहले 20% छूट दे रखा था। उसने नीलिमा के पूछने पर और 5% छूट दिया। दिया। प्रत्येक छूट के बाद का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल: वस्तु का अंकित मूल्य = ₹1000.

पहली कटौती का प्रतिशत = 20%

पहली कटौती = 1000 का 20%

$$= \frac{20}{100} \times 1000 = ₹\ 200$$

पहली कटौती के बाद मूल्य = ₹ 1000 – ₹ 200

= ₹ 800.

दूसरी कटौती का प्रतिशत= 5%

दूसरी कटौती = ₹ 800 का 5%

$$= \frac{5}{100} \times 800 = ₹\ 40$$

दूसरी कटौती के बाद मूल्य = ₹ 800 – ₹ 40 = ₹ 760.

विक्रय मूल्य = ₹ 760.

> 20% कटौती का अर्थ है ₹ 100 को कम कर ₹ 80 करना
>
> 5% कटौती का अर्थ है ₹ 100 को ₹ 95 तक कम किया गया।
>
> ∴ विक्रय मूल्य
>
> $= 1000 \times \frac{80}{100} \times \frac{95}{100}$
>
> = ₹ 760

दी गई कटौती की राशि = ₹1000 – ₹ 760 = ₹ 240.

₹ 1000 के लिए कटौती की राशि ₹ 240 है।

कटौती का प्रतिशत जो दिया गया है = ₹ 240 × $\frac{24\cancel{0}}{10\cancel{0}\cancel{0}} \times \cancel{10}0$ = 24%

आपने क्या निरीक्षण किया? क्या दी गई कटौती का प्रतिशत अगले दो कटौतियों के समान होगी ?

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए।

प्रति अपने लिए कपड़े खरीदने दूकान पर गई। एक सूट का एम.आर.पी. ₹ 2500 है। दुकानदार ने उस पर 5% की छूट दे रखी थी। उसने फिर से कुछ और छूट देने को कहा तो दुकानदार ने फिर 3% कटौती दी। अंततः उसे कुल कितने प्रतिशत छूट मिला? क्या छूट 8% के समान है?

5.4 प्रतिशत में निर्धारण :

एक सामान का दाम ₹ 477.80 है। दुकानदार ने उस पर 15% छूट दी। आप कैसे जानेंगे कि आपको दुकानदार को कितने रुपये देने हैं?

सामान के दाम को निकटतम विधि द्वारा ₹ 477.80 से ₹ 480 बना दीजिए। फिर उस पर 10% कटौती ज्ञात कीजिए। आपको ₹ 48 प्राप्त होंगे। इसका आधा लीजिये। यह ₹ 24 दाम का 5% होगा। इसलिए कटौती की राशि ₹ 48 + ₹ 24 = ₹ 72 होगी। अनुमानित राशि जो देनी है वह लगभग ₹ 410 के होगा।

प्रयत्न कीजिए।

(i) ₹ 357.30 का 20% ज्ञात कीजिए। (ii) ₹ 375.50 का 15% ज्ञात कीजिए।

5.5 लाभ और हानि (Profit and Loss) :

बेचने और खरीदने के संबंधित मूल्य (लाभ और हानि)

निम्न स्थितियों का निरीक्षण कीजिए।

- सीता ने एक कुर्सी ₹ 750 में खरीद कर उसे ₹ 900 में बेची।
- पिछले वर्ष मेरी ने ₹ 25000 में 10 ग्राम सोना खरीदा और उसे इस वर्ष ₹ 30,000 में बेचा।
- रहीम ने ₹ 1600 में एक साइकिल खरीदा और अगले वर्ष उसे ₹ 1400 में बेचा।
- अनीता ने ₹ 4.8 लाख में एक कार खरीदी और 2 वर्ष के पश्चात उसे ₹ 4.1 लाख में बेची।
- हरि ने एक घर ₹ 9 लाख में खरीदकर उस पर और ₹ 1 लाख की मरम्मत कराई। फिर उसे ₹ 10.7 लाख में बेच दिया।

प्रथम चार उदाहरणों में लागत मूल्य और विक्रय मूल्य के व्यवकलन से लाभ या हानि ज्ञात की जा सकती है।

लेकिन अंतिम उदाहरण में हरि का लाभ क्या है? क्या वह ₹ 1.7 लाख है? बिलकुल नहीं। उसने कार बेचने से पहले कुछ रुपये उसप खर्च किये। इस प्रकार के खर्च को क्या कहते हैं?

कभी-कभी दुकानदार को वस्तु के मूल्य के अतिरिक्त कुछ अन्य खर्च भी उठाने पड़ते हैं, जैसे यातायात, देखभाल का खर्च, मज़दूरी, मरम्मत, कमीशन, गोदाम का किराया आदि पर खर्च करना पड़ता है। ऐसे खर्च अ़तिरिक्त खर्च कहलाते हैं। और ये लागत मूल्य में जोड़ दिये जाते हैं। लाभ या हानि हमेशा अंतिम लागत मूल्य पर गणना की जाती है।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए।

लागत मूल्य, विक्रय मूल्य के बराबर होने पर क्या होता है। क्या आपको अपने दैनिक जीवन में ऐसी परिस्थितियाँ मिलती हैं? उपर्युक्त परिस्थितयाँ में लाभ % या हानि % ज्ञात करना सरल है। यदि वह प्रतिशत में हो तो वह अधिक अच्छी तरह समझ में आयेगा। लागत मूल्य का अधिक प्रतिशत, लाभ % का एक उदाहरण है और लागत मूल्य का कम प्रतिशत, हानि % का एक उदाहरण है।

आइए हम कुछ उदाहरण देखें

उदाहरण:4 राधिका का पुराने-सामान का व्यापार है। उसने ₹ 5000 में एक पुराना फ्रिज खरीदा। उसने उसके यातायात पर ₹ 100 और मरममत पर ₹ 500 खर्च किया। अब वह उसे ₹ 7000 में बेचती है।

ज्ञात कीजिए (i) कुल लागत मूल्य (ii) लाभ या हानि प्रतिशत

हल: (i) कुल लागत मूल्य = लागत मूल्य + यातायात - खर्च + मरम्मत खर्च

$= ₹\ (5000 + 100 + 500) = ₹\ 5600$

इसलिए कुल लागत मूल्य ₹ 5600.

(ii) विक्रय मूल्य ₹ 7000 है। यहाँ विक्रय मूल्य > लागत मूल्य है, इसलिए यहाँ लाभ है।

लाभ = विक्रय मूल्य - लागत मूल्य $= ₹\ 7000 - ₹\ 5600 = ₹1400$

₹ 5600 के लागत मूल्य पर ₹1400 लाभ है।

यदि लागत मूल्य ₹100 है तो लाभ क्या होगा?

लाभ प्रतिशत $= \dfrac{1400}{5600} \times 100 = 25\%$

उदाहरण:5 विनय ने एक फ्लैट ₹ 4,50,000 में खरीदा। उसकी मरम्मत कराने तथा रंगवाने में उसने ₹10,000 खर्च किये। तत्पश्चात उसने उसे ₹ 4,25,500 में बेचा। लाभ या हानि ज्ञात कीजिए और साथ ही उसका प्रतिशत भी ज्ञात कीजिए।

हल: कुल लागत मूल्य = लागत मूल्य + मरम्मत खर्च

$= ₹\ (4,50,000 + 10,000) = ₹\ 4,60,000.$

विक्रय मूल्य ₹ 4,25,500 है। हम यहाँ देखते हैं कि विक्रय मूल्य < लागत मूल्य। इसलिए यहाँ हानि है।

हानि = लागत मूल्य - विक्रय मूल्य

= ₹ 4,60,000 – ₹ 4,25,500 = ₹ 34,500.

₹ 4, 60, 000 के लागत मूल्य पर ₹ 34,500 हानि है। यदि उसका लागत मूल्य ₹100 है तो हानि कितनी होगी।

हानि प्रतिशत $= \dfrac{34,500}{4,60,000} \times 100 = 7.5\%$

उदाहरण:6 वेंकन्ना ने 50 दर्जन केले ₹ 1250 में खरीदे। उसने यातायात पर ₹ 250 खर्च किये। केले खराब होने के कारण वह 5 दर्जन केले नहीं बेच सका। सब केले उसने ₹ 35 दर्जन की दर से बेचे। उसे लाभ होगी या हानि? उसका प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

हल: कुल लागत मूल्य = केले का लागत मूल्य + यातायात खर्च

= ₹ 1250 + ₹ 250 = ₹1500.

बेचे गये केले (दर्जन) = खरीदे गये केले (दर्जन) - बचे हुए केले (दर्जन)

$= 50 - 5 = 45$

विक्रय मूल्य = ₹ 35 × 45 = ₹1575

स्पष्ट है कि कि विक्रय मूल्य > लागत मूल्य, इसलिए लाभ है।

लाभ = विक्रय मूल्य - लागत मूल्य = ₹ 1575 – ₹ 1500 = ₹ 75

₹1500 के लागत मूल्य पर ₹ 75 लाभ है।

₹100 के लागत मूल्य पर कितना लाभ होगा?

लाभ % $= \dfrac{75}{1500} \times 100 = 5\%$

उदाहरण:7 मलिक ने ₹ 3000 से दो मेज़ें खरीदीं। एक मेज़ पर उसको 20% लाभ, और दूसरे पर 20% हानि हुई। कुल लेन-देन पर लाभ या हानि का % ज्ञात कीजिए।

पहली तालिका के लिए	दूसरी तालिका के लिए
विक्रय मूल्य = ₹ 3000	विक्रय मूल्य = ₹ 3000
लाभ प्रतिशत = 20%	हानि प्रतिशत = 20%
लाभ % का अर्थ है लागत मूल्य पर बढ़ाया गया प्रतिशत	हानि % का अर्थ है लागन मूल्य पर कम किया गया प्रतिशत
विक्रय मूल्य ₹ 120 है जब लागत मूल्य ₹100 हो	विक्रय मूल्य ₹ 80 है जब लागत मूल्य ₹100 हो।
जब विक्रय मूल्य ₹ 3000 है तो लागत मूल्य क्या होगा?	जब विक्रय मूल्य ₹3000 है तब लागत मूल्य क्या होगा?
लागत मूल्य = ₹ $100 \times \dfrac{3000}{120}$ = ₹ 2500	लागत मूल्य = ₹$100 \times \dfrac{3000}{80}$ = ₹3750

हल: दो मेजों पर कुल लागत मूल्य = ₹ 2500 + ₹ 3750 = ₹ 6250

दो मेजों पर कुल विक्रय मूल्य = ₹ 3000 + ₹ 3000 = ₹ 6000.

क्योंकि लागत मूल्य > विक्रय मूल्य, यहाँ हानि है।

हानि = लागत मूल्य - विक्रय मूल्य = ₹ 6250 – ₹ 6000 = ₹ 250₹

6250 के लागत मूल्य पर ₹ 250 हानि है

₹ 100 के लागन मूल्य पर हानि क्या होगी?

हानि % = $250 \times \dfrac{100}{6250} = 4\%$

इसलिए पूरे विक्रय व्यवहार पर 4% हानि है।

सोचो, विचार करो, लिखो :

एक दुकानदार ने ₹ 9, 900 में दो टी.वी. बेचे। एक पर उसे 10% का लाभ हुआ और दूसरे पर 10% की हानि। कुल मिलाकर उसे कितना लाभ या हानि हुई? उसका प्रतिशत क्या है?

5.6 बिक्री-कर / मूल्यांकित कर (Sales Tax / Value - Added Tax) :

सरकार हर बिक्री पर बिक्री कर वसूल करती है। इसे सेल टैक्स कहते हैं। दुकानदार यह कर ग्राहक से लेकर सरकार को देता है। सरकार ऐसे कर क्यों लगाती है? क्या आप जानते हैं? जमा कर (टैक्स) से सरकार कई कल्याण-कार्य करती है।

वे वस्तुएँ जो एक स्थान से दूसरे स्थान पर ले जाते है। उन पर बिक्री-कर लगाया जाता है। सेल टैक्स सिर्फ वस्तुओं पर लगाया जाता है उनके कार्यों पर नहीं, इसलिए इसने बिक्री-कर का स्थान ले लिया है। विभिन्न वस्तुओं पर यह मूल्यांकित कर भिन्न होता है। सामान्यत: यह आवश्यक सामग्री पर नहीं होता है, लेकिन यह मूल्यांकित कर बहुमूल्य वस्तुओं और नगीनों पर 1% तथा व्यवसाई निविष्ट और पूँजी साधन और अधिक उपभोगताओं की वस्तुओं पर 5% और अन्य वस्तुओं पर14.5%.

मूल्यांकित-कर वस्तु के विक्रय मूल्य पर लगाया जाता है और उसे मूल्य में जोड़ दिया जाता है। बढ़ा हुआ विक्रय-मूल्य मूल्यांकित कर कहलाता है। निम्न दिये गये बिल का निरीक्षण करें जिसमें मूल्यांकित कर जोड़ दिया गया है।

अपनी माताजी की दवाई लेने के लिये गणपति दवाई की दुकान पर गया। दुकानदार ने निम्न बिल दिया। बिल की कुल राशि ₹ 372.18. इसमें 5% मूल्यांकित कर बिना हुआ है।

(i) मूल्यांकित कर लगने से पहले बिल का मूल्य कितना था ?

Tax Invoice No. : 2012?301549007214 Date : 15-09-2012 20:48:31

Name : Ganpathi Age : 35 Gender : male Do.Reg. No. :

Cus.ID:20121301549000617 Add: Sainathpura)

S.	Product	Mfgr	Sch	Batch	Exp.	MRP.	Rate	Qty	Amount
1	BETATROP TAB	SUN	H	BSK4198	12-14	5.9	5.9	60	318.60
2.	ECOSPRIN 150 MG TAB	USV	H	04004652	05-14	0.4242857	0.38	42	16.04
3.	LASIX 40 MG TAB	AVENTIS	H	0212016	03-16	0.44733334	0.40	15	6.04
4.	ELDERVIT PLUS CAD	ELDER	C	SE0022008	08-13	2.3333333	2.10	15	31.5

बचन राशि : 41.35 मूल्यांकित कर ₹ 354.45 @ 5% = 17.72 कुल : 372.18

कुल राशि : 372.00

बिल कॉपी से साफ अर्थ है कि बिल राशि = ₹ 354.45 ,Vat @ 5% = रु.17.72

उदाहरण:8 एक जोड़ी जूतों का मूल्य ₹ 450 है। उस पर बिक्री-कर 6% है। बिल की राशि ज्ञात करो ?

हल: ₹ 100 पर बिक्री-कर ₹ 6 है

₹ 450 पर कितना कर होगा ?

दिया गया बिक्री कर = ₹ $\frac{6}{100} \times 450 \quad = ₹\ 27$

बिल की राशि = वस्तु का लागत मूल्य + बिक्री-कर = ₹ 450 + ₹ 27 = ₹ 477.

5.7 Goods and Service Tax (GST) वस्तु तथा सेवा कर :

वस्तु तथा सेवा की आपुर्ती पर यह एक एकल अप्रत्येक्ष कर है । इसे जुलाई **2017** मे लागु किया गया है । इसे अनेक प्रकार के करों को हटाकर जैसे विक्री कर राज्य कर जो कि, भारत में प्रचलित ये जीएसटी के अंतरगत वस्तु तथा सेवा के स्तर पर मुल्य वृध्दी के आधार पर कर लगाया जाता है । इनकी विभिन्न दरें इस प्रकार है ।3%, 5%, 12%, 18% तथा 28% पुरे देश में इन में से 50% केंद्र सरकार को तथा 50% राज्य सरकार को दिया जाता है।

उदाहरण:9 विगनेश एक किराणा दुकान पर अपने परिवार के लिए साबुन खरिदने जाता है । दुकान दार ने उसे एक बिल दिया जो की, इस प्रकार है । बिल का मुल्य ₹ 2200 है जिसमें 18% GST होगा.

GST से पहले बिल का मुल्य क्या होगा तथा CGST ओर SGST को ज्ञान किजीए ?

वस्तु का नाम	**परिमाण**	**रुपये प्रति**	**मुल्य**
चावल	10 kg	100	1000
सर्फ पाकेट	3 kg	100	300
दाले	6 kg	150	900
कु ल			**2200**

हल:

GST सहीत बिल का मुल्य = ₹ 2200

बिल की रक्कम में GST का मुल्य = 18%

$= 2200 \times \frac{18}{100} =$ ₹ 396

GST से पहले बिल की रकम = 2200 – ₹ 396 = ₹ 1804

GST मे CGST का प्रतिशत = 50%

GST मे SGST का प्रतिशत = 50%

GST में CGST मुल्य $= 396 \times \frac{50}{100} =$ ₹ 198

उसी प्रकार GST में SGST का मुल्य $= 396 \times \frac{50}{100} =$ ₹ 198

उदाहरण:10 एक जोडी जुते का मुल्य ₹1000 है उस पर **5 %** GST लगाया गया है। उस बिल की रकम ज्ञात किजीए।

हल : ₹ 100 पर GST ₹ 5 देने होगे ।

₹ 1000 पर GST कर = ₹ $\frac{5}{100} \times 1000 =$ ₹ 50

बिल की रकम = वस्तु की दर + GST = ₹1000 + ₹50 = ₹ 1050.

अभ्यास 5.2

1. वर्ष 2012 में विश्व भर में 36.4 करोड़ इंटरनेट उपभोक्ता रहे। अगले 10 वर्ष में यह संख्या 125% तक बढ़ने की संभावना है। वर्ष 2022 तक अंतरजाल उपभोक्ताओं की संख्या निर्धारित कीजिए।
2. एक मकान मालिक हर साल अपने मकान का किराया 5% बढ़ाता है। यदि अब उसका किराया ₹ 2500 प्रतिमाह है तो अगले दो वर्ष के बाद वह किराया कितना होगा ?
3. सोमवार को एक कंपनी के शेयर के मूल्य ₹ 7.50 थे। मंगलवार को उसका मूल्य 6% अधिक हुआ और बुधवार को 1.5% कम हुआ और गुरुवार को 2% कम हुआ। शुक्रवार को जब शेयर बाजार खुला तो प्रत्येक शेयर के मूल्य क्या होगा ?
4. आजकल ज़ेराक्स की मशीन में किसी भी ओरिजिनल को बड़ा या छोटा करने के लिए सिर्फ उसमें अनुकूल प्रतिशत को दर्ज करने से काम बन जाता है। रेशमा 2 सेमी चौडे और 4 सेमी चित्र को

बड़ा करना चाहती है। उसने मशीन को 150% बढ़ाया और फिर वह चित्र बनाया। उसके द्वारा बनाए गए चित्र की चौड़ाई और लंबाई क्या होगी?

5. किताब पर छपा हुआ मूल्य ₹150 है और कटौती प्रतिशत 15% है। कटौती के बाद का मूल्य ज्ञात कीजिए।
6. एक उपहार का अंकित मूल्य ₹ 176 है। उसने उसे ₹ 165 में बेचा तो छूट प्रतिशत ज्ञात कीजिए।
7. एक दुकानदार ने ₹ 10 प्रति बल्ब के हिसाब से 200 बल्ब खरीदे। लेकिन 5 बल्ब के फ्यूज़ उड़ गए और रद्दी में चले गये। शेष बल्प प्रत्येक ₹ 12 में बेचे गये। लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात करो?
8. निम्न तालिका उचित सूचनाओं में भरिए। (जहाँ आवश्यक हो)

क्र.सं	ला.मू	खर्च	विक्रय मूल्य	लाभ	हानि	लाभ %	हानि %
1	₹ 750	₹ 50		₹80			
2	₹ 4500	₹ 500			₹1,000		
3	₹ 46,000	₹ 4000	₹60,000				
4	₹ 300	₹ 50				12%	
5	₹ 330	₹ 20					10%

9. एक मेज़ पर 5% लाभ लेते हुए उसे ₹ 2,142 में बेचा गया। 10% लाभ उठाने के लिए उसे कितने में बेचना होगा?
10. गोपी ने इब्राहिम को एक घड़ी 12% लाभ से बेची। इब्राहिम ने उसे जॉन को 5% हानि से बेची। यदि जॉन ने ₹1,330 दिए तो गोपी का मूल्य ज्ञात कीजिए।
11. मधु और कविता ने एक नया घर ₹ 3,20,000 में खरीदा। कुछ आर्थिक कमी के कारण उन्होंने उस घर को ₹ 2, 80,000 में बेच दिये। इन्हें ज्ञात कीजिए।
    (a) उठायी गई हानि (b) लाभ प्रतिशत
12. एक पुन:विक्रेता ने कार के मालिक से एक पुरानी-कार ₹ 1,50,000 में खरीदी। उसकी मरम्मत तथा रंगवाने में उसने ₹ 20,000 खर्च किये और ₹ 2,00,000 में बेच दिया। उसकी लाभ या हानि ज्ञात कीजिए। उसका प्रतिशत भी ज्ञात कीजिए।
13. ललिता ने अपना जन्मदिन पर होटल से एक पार्सल लिया। उसका बिल 5% मूल्यांकित-कर सहित ₹ 1,450 था। ललिता ने होटल वाले से कुछ छूट माँगी और उसने 8% छूट दी। अब यह मालूम कीजिए कि होटल के मालिक को ललिता ने कितनी राशि दी।
14. यदि निम्नमूल्य GST सहित हैं तो प्रत्येक का वास्तविक-मूल्य ज्ञात कीजिए।

क्र.सं	वस्तु	GST %	बिल का मूल्य (₹)	वास्तविक मूल्य (₹)
(i)	हीरा	3%	₹ 10,300	
(ii)	प्रेशर-कुकर	12%	₹ 3,360	
(iii)	फेस-पाउडर	28%	₹ 256	

15. एक सेलफोन कंपनी ने सेलफोन का दर 4050 निश्चित किया है एक डिलर 12% अतिरिक्त GST देकर सेलफोन खरीदता है। डिलर ने कितना GST चुकाया है? और सेलफोन का क्रम मुल्य क्या होगा?'n'

16. एक सुपर मार्केट में प्रत्येक वस्तु कर दर इस प्रकार लगाया गया है की, जिससे 4% विक्रय कर जोडने पर उसे किसी भी प्रकार से रुपये या पैसे में परिवर्तन की आवश्यकता नही है। क्योंकी उसका परिणाम 'n' रुपये होगा जहाँ 'n' एक घनात्मक पुर्णांक है। 'n' का सबसे छोटा मुल्य ज्ञात किजीए?

5.7 चक्रवृद्धि ब्याज (Compound Interest) :

ब्याज वह राशि है जो बैंक या डाक-घर दिये गये ऋण पर लेता है या जमा राशि पर देता है।

ब्याज वह अतिरिक्त राशि है जो मूल धन पर एक वर्ष के लिए गणना की जाती है।

लेकिन इस ब्याज की गणना हम कैसे करेंगे? हम उस ब्याज की गणना को क्या कहेंगे जो ब्याज मूलधन पर पूरे समय के लिए हो, वह साधारण या सरल ब्याज कहलाता है। वह मूलधन पर बढ़ाया गया प्रतिशत है। हम यह समझने के लिए एक उदाहरण देखेंगे।

उदाहरण:11 ₹ 2500 पर 12% वार्षिक ब्याज से 3 वर्षों के लिए कर्ज ली गई। साधारण ब्याज ज्ञात कीजिए और बताइए कि 3 वर्षों के अंत में कितना मिश्रधन प्राप्त होगा?

हल : 12% वार्षिक ब्याज की दर का अर्थ है, ₹100 पर, 1 वर्ष के लिए ₹12

इसलिए ₹ 2500 पर, एक वर्ष के लिए ब्याज होगा?

1 वर्ष के लिए ब्याज $= ₹\ \frac{12}{100} \times 2500 = ₹300$

3 वर्ष के लिये ब्याज $= ₹\ 3 \times \frac{12}{100} \times 2500 = ₹\ 900.$

$$I = \frac{T \times R \times P}{100} = \frac{PTR}{100}$$

$I =$ ब्याज $\qquad P =$ मूल धन $= ₹\ 2500$

$T =$ वर्षों में समय $= 3$, $\quad R =$ ब्याज की दर $= 12$

3 वर्ष के अंत में मिश्रधन = मूलधन + ब्याज

$= ₹\ 2500 + ₹\ 900 = ₹\ 3400.$

मिश्रधन = मूलधन + ब्याज $= P + \frac{P \times T \times R}{100} = P\left(1 + \frac{T \times R}{100}\right)$

जब $t = 1$ वर्ष, मिश्रधन $A = P\left(1 + \frac{R}{100}\right)$

प्रयत्न कीजिए।

तालीका पुर्ण किजिए।

क्र.सं	मूलधन (P) ₹ में	समय (T) वर्ष में	ब्याज की दर प्रति वर्ष (R) % में	ब्याज (I) = $\frac{P \times T \times R}{100}$ ₹ में
1	3000	3	6	
2		2	5	50
3	1875		12	675
4	1080	2.5		90

रमेश ने श्रीनू से 10% वार्षिक दर से ₹100 का कर्ज लिया। दो वर्ष के पश्चात वह श्रीनू के पास कर्ज वापस करने के लिए गया। रमेश ने श्रीनू को ₹ 120 दिये और कहा कि उसे ₹1 लौटाने हैं। इन दोनों ने अपनी गणना के अंतर को निम्न प्रकार से एक कागज़ पर किया।

रमेश की पद्धति			श्रीनू की पद्धति		
पहला वर्ष	मूल धन ब्याज @ 10% कुल राशी	₹ 100 ₹ 10 ₹ 110	पहला वर्ष	मूल धन ब्याज @ 10% कुल राशी	₹ 100 ₹ 10 ₹ 110
दूसरा वर्ष	मूल धन ब्याज @ 10% दूसरे वर्ष के अंत में मिश्र धन	₹ 100 ₹ 10 = मूलधन + ब्याज - एक वर्ष का + ब्याज दूसरे वर्ष का = 100+10+10 = ₹120	दूसरा वर्ष	Principal Interest @ 10% दूसरे वर्ष के अंत में देनी राशी	₹ 110 ₹ 11 = ₹121

दोनों पद्धतियों का अंतर ₹1 है। दोनों पद्धतियों में अंतर क्यों है? आप आसानी से देख सकते हैं कि दूसरे वर्ष के ब्याज की गणना करते समय रमेश ने ₹ 100 मूलधन लिया, जबकि श्रीनू ने ₹110 लिया। रमेश द्वारा किया गया ब्याज साधारण ब्याज कहा जाता है। क्या आप जानते हैं कि श्रीनू द्वारा किये गये ब्याज को क्या कहते हैं? यह चक्रवृद्धि ब्याज कहलाता है। इसलिए चक्रवृद्धि ब्याज आपको ब्याज के ऊपर ब्याज़ लेना बताता है। आप कब और कौन-सा ब्याज पसन्द करते हैं?

5.8 चक्रवृद्धि ब्याज के लिए सूत्र निर्माण :

उपर्युक्त उदाहरण में हमने देखा कि श्रीनू ने चक्रवृद्धि ब्याज की गणना की। एक या दो वर्ष के लिए इस तरह की गणना तो ठीक है, लेकिन यदि दो वर्ष से अधिक हो तो क्या इसी तरह गणना करना चाहिए? चक्रवृद्धि ब्याज की गणना करने के लिए क्या कोई संक्षिप्त विधि है? एक उदाहरण के द्वारा हम ज्ञात करेंगे।

जब $t = 1$वर्ष, मिश्रधन (A) $= P\left(1+\frac{R}{100}\right)$ साधारण ब्याज से

मानलो $P_1 =$ ₹10,000 और $R = 12\%$ प्रति वर्ष

श्रीनू की पद्धति			उसी पद्धति की सामान्य पद्धति		
1^{st} वर्ष	मूलधन P_1	₹ 10,000		मूलधन	P_1
	मिश्रधन A_1	$10000\left(1+\frac{12}{100}\right)$	1^{st} वर्ष	मिश्रधन A_1	$A_1 = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)$
		$=10000\left(\frac{112}{100}\right)$			
		$=$ ₹ 11,200			
2^{nd} वर्ष	मूलधन P_2	₹ 11,200	2^{nd} वर्ष	मूलधन P_2	$= P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)$
	मिश्रधन A_2	$11200\left(1+\frac{12}{100}\right)$		मिश्रधन A_2	$A_2 = P_2\left(1+\frac{R}{100}\right)$
		$=11200\left(\frac{112}{100}\right)$			$= P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)\left(1+\frac{R}{100}\right)$
		$=$ ₹ 12,544			$= P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)^2$

$$A_n = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

सामान्यतः हम कह सकते है कि $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$

लेकिन इस तरह करने से हमको सिर्फ 'n' वर्ष के अंत का मिश्रधन प्राप्त होगा। चक्रवृद्धि ब्याज कैसे प्राप्त होगा? हाँ! यह तो बहुत ही सरल है। अंतिम राशि से मूलधन को घटाने पर चक्रवृद्धि ब्याज प्राप्त होगा।

$$\therefore C.I = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n - P$$

इस तरह साधारण ब्याज तथा चक्रवृद्धि ब्याज में क्या अंतर है? साधारण ब्याज प्रतिवर्ष समान होता है। लेकिन चक्रवृद्धि ब्याज समय पर बढ़ता रहता है।

उदाहरण:12 5000 को 8% प्रति वर्ष की दर से 2 वर्ष के लिए चक्रवृद्धि ब्याज तथा मिश्रधन मालूम कीजिए।

हल : P = ₹5000; R = 8% और n = 2 वर्ष

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

$$= 5000\left(1+\frac{8}{100}\right)^2$$

$$= 5000 \times \frac{108}{100} \times \frac{108}{100} = ₹\ 5832.$$

अर्जित ब्याज = मिश्रधन - मूलधन

= ₹ 5832 – ₹ 5000

= ₹ 832

यह कीजिए

1. 6 वर्ष के लिए 5% प्रतिवर्ष की दर से ₹ 20,000 पर कितना चक्रवृद्धि ब्याज अर्जित किया जायेगा?
2. ₹ 12600 पर 10% प्रति वर्ष दर से 2 वर्षों के लिऐ चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

5.9 वार्षिक तथा अर्धवार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज का संयोजन

पिछले सवालों में आपने देखा है कि हमने वार्षिक संयोजन ब्याज का उपयोग किया है। हम ब्याज की दर को अर्धवार्षिक या त्रैमासिक भी संयोजन कर सकते हैं।

जब ब्याज का वार्षिक संयोजन नहीं होता है तो उस समयांतर को क्या कहते हैं जिसके बाद ब्याज, मूलधन में जोड़ा जाता है। यह समपरिवर्तन काल कहलाता है। जब ब्याज का अर्धवार्षिक संयोजन हो तब प्रत्येक 6 माह के दो समपरिवर्तन काल होते हैं। ऐसी स्थिति में ब्याज वार्षिक दर का आधा होगा और ब्याज का संयोजन वर्ष की संख्या का दुगना होगा।

उदाहरण:13 यदि ब्याज का संयोजन अर्धवार्षिक हो तो ₹ 1000 पर 10% दर से 1 वर्ष के चक्रवृद्धि ब्याज की गणना कीजिए।

हल: यहाँ ब्याज का अर्धवार्षिक संयोजन है, इसलिए एक वर्ष में दो समपरिवर्तन काल होंगे।

इसलिए n = 2

6 महीने के लिए ब्याज की दर = $\frac{1}{2} \times 10\% = 5\%$

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

$$A = 1000\left(1+\frac{5}{100}\right)^2$$

$$= 1000\left(\frac{105}{100}\right)^2$$

$= ₹\ 1102.50$

चक्रवृद्धि ब्याज $= A - P = 1102.50 - 1000 =$ ₹102.50

इसे कीजिए।

कितने समपरिवर्तन काल के लिए ब्याज का संयोजन हुआ है। प्रत्येक में दर भी ज्ञात कीजिए।

1. एक राशि $1\frac{1}{2}$ वर्ष के लिए 8% प्रति वर्ष की दर से अर्धवार्षिक संयोजन
2. एक राशि 2 वर्ष के लिए 4% प्रति वर्ष की दर से अर्धवार्षिक संयोजन

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए।

यदि ब्याज का त्रैमासिक संयोजन हो तो क्या होगा? उसमें कितने समपरिवर्तन काल होंगे? त्रैमासिक की दर क्या होगी? वह वार्षिक दर का कितना भाग होगा? आपके मित्रों से चर्चा कीजिए।

उदाहरण :14 यदि ब्याज का अर्धवार्षिक संयोजन हो तो ₹ 12000 का $1\frac{1}{2}$ वर्ष के लिए 10% की दर से कितना मिश्रधन देना होगा?

हल: ब्याज का संयोजन अर्धवार्षिक होने के कारण, $1\frac{1}{2}$ वर्ष में 3 समांतर काल होंगे। इसलिए $n = 3$,

दर = $\frac{1}{2} \times 10\% = 5\%$

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

$$A = 12000\left(1+\frac{5}{100}\right)^3$$

$$= 12000\left(\frac{105}{100}\right)^3$$

$$= ₹\ 13891.50$$

चक्रवृद्धि ब्याज $= A - P$

$$= 13891.50 - 12000$$

$$= ₹\ 1891.50$$

उदाहरण:15 यादय्या ने अपनी परिवार की आवश्यकता के लिए ₹ 5120 का $12\frac{1}{2}$% प्रति वर्ष की दर से वार्षिक संयोजन किया। दो वर्ष नौ माह के पश्चात उसे कितना मिश्रधन और कुल ब्याज देना होगा।

हल : रेशमा ने इस समस्या को इस तरह हल करने का प्रयास किया। सबसे पहले उसने समय को वर्षों में बदला

2 वर्ष 9 माह $= 2\frac{9}{12}$ वर्ष $= 2\frac{3}{4}$ वर्ष

उसने इसे सूत्र में लिखने का प्रयत्न किया जो उसे पता है $A = 5120\left(1+\frac{25}{200}\right)^{2\frac{3}{4}}$

अब वह अटक गई। उसने अपने अध्यापक से पूछा कि भिन्न के रूप के घातांक को कैसे ज्ञात किया जाय?

अध्यापक ने एक संकेत दिया। पहले पूर्ण संख्या का मिश्रधन ज्ञात करो। उसके पश्चात इस राशि को मूलधन के रूप में उपयोग करते हुए $\frac{3}{4}$ वर्ष के लिए सरल ब्याज ज्ञात करो।

इसलिए $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$

$$A = 5120\left(1+\frac{25}{200}\right)^2$$

$$= 5120\left(\frac{225}{200}\right)^2$$

$$= \text{रु}.6480$$

शेष 9 माह का ब्याज $= 6480 \times \frac{25}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{100} = ₹\ 607.50.$

इसलिए 2 वर्ष 9 माह के पश्चात यादय्या को देना होगा

$$= 6480 + 607.50 = ₹\ 7087.50$$

इसलिए कुल चक्रवृद्धि ब्याज = 7087.50 – 5120 = ₹ 1967.50

5.10 चक्रवृद्धि ब्याज के सूत्र का उपयोग

हम चक्रवृद्धि ब्याज का सूत्र कहाँ उपयोग करते हैं? ब्याज की गणना करने के अतिरिक्त यह सूत्र भिन्न परिस्थितियों में उपयोग किया जा सकता है। जैसे-

- जनसंख्या में वृद्धि या कमी।
- यदि वृद्धि की दर ज्ञात हो तो जीवाणुओं की वृद्धि।
- एक वस्तु का मूल्य, यदि उसका मूल्य आगामी वर्षों में बढ़ता था।

उदाहरण :16 एक गाँव की जनसंख्या 6250 है। ज्ञात हुआ है कि प्रति वर्ष जनसंख्या में 8% प्रति वर्ष की दर से वृद्धि होती है। अगले 2 वर्ष के पश्चात की जनसंख्या ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ P = 6250 R = 8% T = 2 वर्ष

दो वर्ष के बाद जनसंख्या $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$

$$A = 6250\left(1+\frac{8}{100}\right)^2 = 6250\left(\frac{108}{100}\right)^2 = 7290$$

उदाहरण :17 एक रबर की गेंद कुछ ऊँचाई से गिराई गई। पता चला कि वह छोड़ी गई ऊँचाई के सिर्फ 90% उछली। यदि वह गेंद 25 मी. ऊँची इमारत से गिराई गई हो तो भूमि पर दो बार उछलने के बाद वह कितनी ऊँचाई तक उठेगी?

हल: पहली बार वह 90% होगा। इसलिए हर बार वह अपनी ऊँचाई से 10% कम उछलती है।

इसलिए R = -10% लेते हुये यह समस्या हल की जा सकती है।

P = 25 मी. और n = 2

दो बार भूमि पर उछलने के पश्चात, गेंद की ऊँचाई

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n \qquad A = 25\left(1-\frac{10}{100}\right)^2$$

$$= 25\left(\frac{90}{100}\right)^2 = 20.25 \text{ मी.}$$

अभ्यास - 5.3

1. सुधाकर ने अपन घर को नया बनाने के लिए बैंक से ₹ 15 000 ऋण लिये। उसने इस राशि को 9% प्रतिवर्ष की दर पर 8 वर्ष के लिए साधारण ब्याज पर उधार लिया। इसका मासिक किश्त क्या होगा?
2. ₹ 21000 में एक टी.वी. खरीदी गई। एक वर्ष के बाद टी.वी. के मूल्य में 5% गिरावट आई। एक वर्ष के बाद उस टी.वी. का मूल्य ज्ञात करो।
3. ₹ 8000 को 5% प्रति वर्ष की दर से 2 वर्षों के लिए चक्रवृद्धि ब्याज तथा मिश्रधन वार्षिक संयोजन से ज्ञात कीजिए।
4. ₹ 6500 को 2 वर्ष के लिए वार्षिक संयोजन से चक्रवृद्धि ब्याज और मिश्रधन ज्ञात कीजिए। पहले वर्ष में ब्याज की दर 5% प्र.व. तथा दूसरे वर्ष में 6% प्रति वर्ष है।
5. एक वित्त कम्पनी से प्रतिभा ने ₹ 47000 ऋण 17% की दर से साधारण ब्याज पर 5 वर्ष के लिए लिया और कार खरीदी।
   (a) वित्त कंपनी को प्रतिभा को कितना मिश्रधन देना पड़ेगा?
   (b) उसका मासिक किश्त क्या होगा?
6. वर्ष 2011 में हैदराबाद की जनसंख्या 68,09,000 थी। यदि वह 4.7% प्रति वर्ष की दर से बढ़ती है तो वर्ष 2015 के अंत तक उसकी जनसंख्या क्या होगी?
7. चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए जब ₹ 10000 की राशि $8\frac{1}{2}$% प्रति वर्ष की दर से 1 साल 3 माह के लिए वार्षिक संयोजन किया गया है?
8. आरिफ ने एक बैंक से ₹ 80,000 कर्ज लिया। यदि ब्याज की दर 10% प्रति वर्ष और समय $1\frac{1}{2}$ वर्ष हो तो उसके मिश्रधन में अंतर ज्ञात किजिए जब
   (i) वार्षिक संयोजन हो (ii) अर्धवार्षिक संयोजन हो।
9. मैंने प्रसाद से ₹ 12000, 2 वर्ष के लिए, 6% प्रति वर्ष ब्याज की दर से उधार लिया। यदि मैंने यह राशि 6% प्रतिवर्ष की दर पर वार्षिक संयोजन से लिया होता तो मुझे कितनी अधिक राशि देनी होती?
10. एक प्रयोगशाला के एक प्रयोग में जीवाणु की वृद्धि 2.5% प्रति घंटा है। दो घंटे के अंत में जीवाणुओं की संख्या ज्ञात कीजिए यदि आरंभिक संख्या 5, 06,000 हो।
11. वार्षिक संयोजन के हिसाब से कमला ने बैंक से ₹ 26400, 15% प्रतिवर्ष की दर से कर्ज लिया। कर्ज चुकाने के लिए उसे 2 वर्ष 4 माह के अंत में कितना मिश्रधन देना होगा?
12. भारती ने ₹ 12500, 12% प्रति वर्ष की दर से 3 वर्ष के लिए साधारण-ब्याज पर उधार लिया और माधुरी ने वही राशि, समान समय के लिए 10% प्रति वर्ष के लिए वार्षिक संयोजन पर लिया। कौन कितना अधिक ब्याज देगा?

13. ₹ 10000 की मशीनरी के मूल्य में 5% गिरावट आई। 1 वर्ष के पश्चात उसका मूल्य का होगा?

14.. एक शहर की जनसंख्या 2 वर्ष के पश्चात ज्ञात कीजिए जो अब 12 लाख है और उसमें प्रतिवर्ष 4% की दर से वृद्धि होती हो।

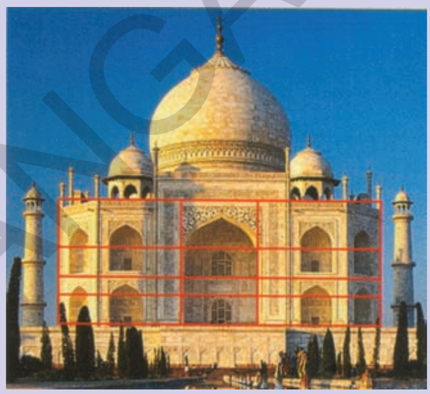
15. यदि त्रैमासिक चक्रवृदि्ध ब्याज हो तो ₹ 1000, 1 वर्ष के लिए, 10% प्रति वर्ष से चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

मुख्यांश

1. दो साधारण अनुपात को एक अनुपात में बताना, जैसे- बाह्य पदों का गुणनफल, मध्य पदों के गुणनफल के समान होगा। इसे हम गुणिन अनुपात कहते हैं। जो दिये गये दो अनुपातों का गुणित अनुपात होता है। यदि a : b और c : d दिए गए दो अनुपात हैं तो उसका गुणित अनुपात $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ अर्थात ac : bd
2. प्रतिशत (%) एक संख्या को 100 से तुलना करता है। प्रतिशत शब्द का अर्थ है सौ में सौ या प्रत्येक 100 में $100\% = \frac{100}{100}$ & यह एक भिन्न है जिसका हर हमेशा 100 होता है।
3. कटौती, अंकित मूल्य का कम किया हुआ प्रतिशत है। मूल्य में कमी को कटौती कहते हैं। यह अंकित मूल्य पर या सूचित मूल्य पर किया जाता है।
4. लाभ या हानि हमेशा लागत मूल्य पर ज्ञात किया जाता है। लाभ बढ़े हुए लागत मूल्य का एक उदाहरण है और हानि कम किये मूल्य का उदाहरण है।
5. VAT, विक्रय मूल्य पर लगाया जाता है और बिल में जोड़ दिया जाता है।
6. साधारण-ब्याज, मूलधन का बढ़ा हुआ प्रतिशत है।
7. साधारण-ब्याज $I = \frac{P \times T \times R}{100}$ जहाँ P = मूलधन, T = समय वर्ष में, R = ब्याज की दर
8. मिश्रधन = मूलधन + ब्याज $= P + \frac{P \times T \times R}{100} = P\left(1 + \frac{T \times R}{100}\right)$
9. चक्रवृद्धि ब्याज आपको ब्याज पर ब्याज अर्जित करने की अनुमति देता है।
10. 'n' वर्ष के अंत में चक्रवृद्धि का मिश्रधन $A = P\left(1 + \frac{R}{100}\right)^n$
11. वह समय जिसके बाद ब्याज, मूलधन में जोड़ दिया जाता है वह समपरिवर्तन काल कहलाता है। जब ब्याज का अर्धवार्षिक संयोजन हो तो एक वर्ष में 6 महीने के दो समपरिवर्तन काल होते हैं। ऐसी स्थिति में अर्धवार्षिक दर, वार्षिक दर का आधा होगा।

क्या आप जानते हैं?

पूर्वकाल में ग्रीस में वास्तुकार तथा कलाकार ने समझा कि कोई ऐसा आकार है जो आयत के रूप में होता है और बहुत सुन्दर दिखाई देता है। आयत के लिए उसकी लम्बी भुजा और छोटी भुजा का अनुपात लगभग **1.615 : 1**



जाँच कीजिए कि यह अनुपात उसके बहुत निकट है जो सुनहरा अनुपात कहलाता है। पार्थेनन नामक ग्रीक मंदिर ईसा पूर्व पाँचवी शताब्दी में, सफेद मार्बल से इसी सुनहरे अनुपात के अनुसार बनाया गया था। भारत का ताजमहल भी इस सुनहरे अनुपात का एक उदाहरण है।

समान अनुपातों का योग

1. $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{6}+\frac{4}{8}+.....+\frac{100}{200}$ का योग क्या होगा?

   क्या हम इन्हें इस प्रकार जोड़ सकते हैं?

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{6}+\frac{4}{8}+.....+\frac{100}{200} = \frac{1+2+3+4+.....+100}{2+4+6+8+.....+200}$$
$$= \frac{5050}{2\times 5050} = \frac{1}{2}$$

यदि $\frac{p_1}{q_1}=\frac{p_2}{q_2}=\frac{p_3}{q_3}=.....=\frac{p_n}{q_n}$

तो $\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}+\frac{p_3}{q_3}+.....+\frac{p_n}{q_n}=\frac{p_1+p_2+p_3+....+p_n}{q_1+q_2+q_3+.....+q_n}=\frac{p_1}{q_1}$

2. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ यद्यैव (iff) $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ $(b,d>0)$

   $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$ यद्यैव $\frac{1+2}{2}=\frac{3+6}{6}$

   $\frac{3}{2}=\frac{9}{6}$ इसे फिर से इस प्रकार भी लिखा जा सकता है- $\frac{5}{2}=\frac{15}{6}$......

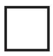
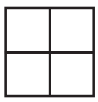
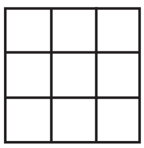
अध्याय **6**

वर्ग मूल एवं घन मूल (SQUARE ROOTS AND CUBE ROOTS)

6.0 परिचय

एक इकाई भुजा वाले वर्घ को इकाई वर्ग कहते हैं।

आइए इकाई वर्गों की सहायता से वर्गाकार आकृति बनायें।
नीचे दी गई तालिका में इकाई वर्गों की संख्या पर ध्यान दो।

क्र.संख्या	आकृति	भुजा की लम्बाई इकाई में	इकाई वर्गों की संख्या
1		1	1
2		2	4
3		3	9

इसी प्रकार और दो वर्ग बनाइए।

क्या आप अनुमान लगा सकते हो कि 6 इकाई भुजा वाले वर्ग द्वारा कितने इकाई वर्ग बना सकते हो।
उक्त परीक्षण के आधार पर हम 1, 4, 9, 16, 25 … इकाई वर्गों द्वारा वर्गाकार आकृति बना सकते हैं।
1, 4, 9, 16, 25, … संख्याओं को हम इस प्रकार दर्शा सकते हैं।

$1 = 1 \times 1 = 1^2$

$4 = 2 \times 2 = 2^2$

$9 = 3 \times 3 = 3^2$

$16 = 4 \times 4 = 4^2$

25 = …… × …… = ……..

36 = ……. × …… = ……..

…………………………………..

…………………………………...

$m = n \times n = n^2$ जहाँ m, n पूर्णांक हैं।

गुणनखण्डों के क्रम पर ध्यान दें।

आपने देखा कि दिए क्रम में संख्याओं को 2 समान गुणनखण्डों के गुणनफल द्वारा दर्शाया जाता है।

उदा: (i) $9 = 3 \times 3$

(ii) $49 = 7 \times 7$

(iii) $1.44 = 1.2 \times 1.2$

(iv) $2.25 = 1.5 \times 1.5$

सामान्य रूप में पूर्णांक 'm' को n^2 द्वारा दर्शाया जाता है जहाँ 'n' पूर्णांक होता है और 'm' एक वर्ग संख्या होती है।

सभी वर्ग संख्याएँ, पूर्ण वर्ग होती हैं किंतु सभी पूर्ण वर्ग, वर्ग संख्याएँ नहीं हो सकतीं।

उदा: 2.25 एक पूर्ण वर्ग है क्योंकि इसे $2.25 = (1.5)^2 = 1.5 \times 1.5$ द्वारा दर्शाया जा सकता है। परन्तु 1.5 एक पूर्ण संख्या नहीं है। इसलिए यह वर्ग संख्या नहीं है।

क्या 42 एक वर्ग संख्या है?

हम जानते हैं कि $6^2 = 36$ और $7^2 = 49$, यदि 42 एक वर्ग संख्या है तो वह एक पूर्णांक का वर्ग होना चाहिए और इसे 6 और 7 के बीच होना चाहिए लेकिन 6 और 7 के बीच कोई भी पूर्ण संख्या नहीं है इसलिए 42 वर्ग संख्या नहीं है।

आइए नीचे दी गई तालिका में पूर्ण वर्गों का निरीक्षण करें।

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

क्या उक्त तालिका में अंकित पूर्ण वर्गों के अलावा भी कोई पूर्ण वर्ग संख्या है?

इसे कीजिए:

1. निम्न संख्याओं के मध्य के पूर्ण वर्गों को लिखिए।

   (i) 100 और 150 (ii) 150 और 200

2. क्या 56 एक पूर्ण वर्ग है? कारण बताइए।

6.1 वर्ग संख्याओं के गुण :

निम्न तालिका में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

संख्या	वर्ग
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	....
7	49
8	64
....	81
10	100

संख्या	वर्ग
11	121
12	144
13	....
14	196
15	225
16	....
17	289
18	324
19	361
20	400

संख्या	वर्ग
21	441
22	....
23	529
....	576
25	625
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....

उक्त तालिका में वर्ग संख्याओं के इकाई स्थान के अंकों पर ध्यान दो। आप देखेंगे कि ये संख्याएँ इकाई स्थान पर 0, 1, 4, 5, 6 और 9 हैं। किसी भी इकाई स्थान पर 2, 3, 7 या 8 नहीं है। इसलिए इन संख्याओं के इकाई स्थान पर 2, 3, 7 या 8 होता है तो वह संख्या पूर्ण वर्ग नहीं है।

क्या हम कह सकते हैं कि जिन संख्याओं के इकाई स्थान पर 0, 1, 4, 5, 6 या 9 हो वह पूर्ण संख्या है? सोचिए।

प्रयत्न करो :

1. निम्न संख्याएँ पूर्ण वर्ग हैं या नहीं, पहचानिए और कारण बताइए।

   (i) 84 (ii) 108 (iii) 271 (iv) 240 (v) 529

1, 9, 11, 19, 21 संख्याओं के वर्ग लिखिए।

क्या आपने संख्या के इकाई स्थान के अंक और उनके वर्गों के बीच संबंध का निरीक्षण किया? निरीक्षण के द्वारा यह पाया गया कि यदि किसी संख्या का इकाई अंक 1 या 9 हो तो उस संख्या के वर्ग का इकाई अंक केवल 1 होगा।

यदि किसी संख्या का इकाई अंक 4 या 6 हो तो अंक संख्या के वर्ग का इकाई अंक हमेशा 6 होगा। इसी प्रकार उन वर्ग संख्याओं के इकाई अंकों का पता लगाइए जिनके अन्त में 0,2,3, 5, 7 और 8 हों।

इसे कीजिए

1. किन वर्ग संख्याओं की इकाई स्थान पर 1 है?

   (i) 126^2 (ii) 179^2 (iii) 281^2 (iv) 363^2

2. किन वर्ग संख्याओं के इकाई स्थान पर 6 है?

   (i) 116^2 (ii) 228^2 (iii) 324^2 (iv) 363^2

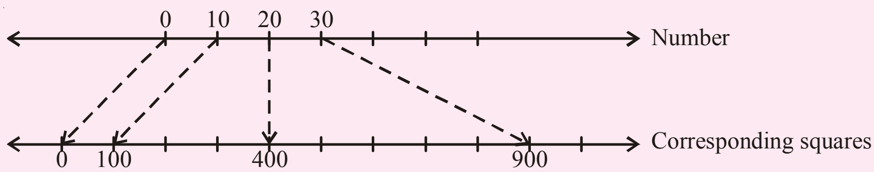
सोचो विचार करो एवं लिखिए:

संख्याएँ	वर्गों में अंकों की संख्या	
	(न्यूनतम)	(अधिकतम)
1-9	1	2
10-99	....	4
100-999	5	....
1009-9999	7	8
n अंक	....	....

प्रयत्न कीजिए।

1. निम्न संख्याओं के वर्गों के अंकों की संख्या ज्ञात कीजिए।

   (i) 72 (ii) 103 (iii) 1000

2. 

   27 , 20 और 30 के बीच में रहता है।

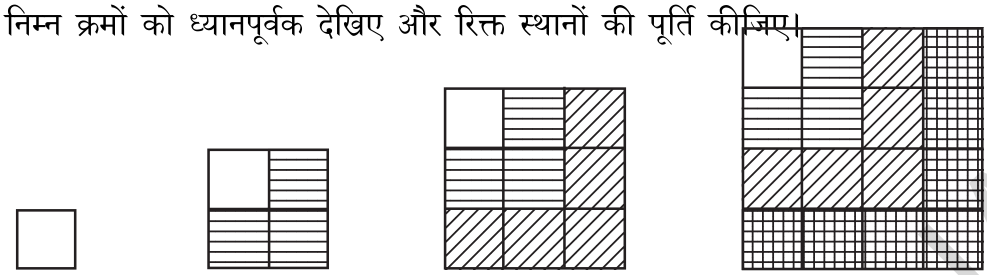
   27^2 , 20^2 और 30^2 के बीच में रहता है।

   अब बताइए कि 27^2 निम्न से कौन सा होगा?

   (i) 329 (ii) 525 (iii) 529 (iv) 729

6.2. वर्गों का रोचक क्रम :

1. निम्न क्रमों को ध्यानपूर्वक देखिए और रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।



$1 = 1^2$ $\quad$ $1+3 = 4 = 2^2$ $\quad$ $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$ $\quad$ $1+3+5+7 = 16 = 4^2$

$1 = 1 = 1^2$

$1 + 3 = 4 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = \ldots\ldots\ldots = (\ )^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = \ldots\ldots\ldots = (\ )^2$

उक्त क्रम से हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि प्रथम 'n' रूढ़ प्राकृतिक संख्याओं का योग 'n^2' के बराबर होता है?

2. निम्न क्रमों में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

$(11)^2 = 121$

$(101)^2 = 10201$

$(1001)^2 = 1002001$

$(10001)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$(1000001)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

3. निम्न क्रमों की पूर्ति कीजिए।

1^2	=	1
11^2	=	1 2 1
111^2	=	1 2 3 2 1
1111^2	=	1 2 3 4 3 2 1
11111^2	=	……………………..
111111^2	=	……………………

इन संख्याओं को पैलिनड्रोम संख्याएँ कहते हैं ।

> पैलिनड्रोम एक शब्द, वाक्य या संख्या होती है जिसे आगे या पीछे पढ़ने में उसका क्रम नहीं बदलता
> उदाः जलज, NOON, MALAYALAM, MADAM, Rats live on no evil star, 15651

4. नीचे दिये गये क्रम में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

$1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$

$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$

$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$

$4^2 + 5^2 + (\ )^2 = 21^2$

$5^2 + (\ )^2 + 30^2 = (\ )^2$

$6^2 + 7^2 + (\ )^2 = (\ )^2$

> इन वर्गों के योग का ध्यानपूर्वक निरीक्षण करो
> क्या आपने इन वर्गों के आधारों में कोई संबंधों को देखा ?
> क्या वर्गों की तीसरी संख्या और पहली व दूसरी संख्या के आधारों में कोई संबंध है?
> तीसरी संख्या के वर्ग और अंतिम संख्या के वर्ग में किस प्रकार का संबंध है?

5. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

$3^2 = 9 = 4 + 5 \qquad \left(\frac{3^2-1}{2} + \frac{3^2+1}{2}\right)$

$5^2 = 25 = 12 + 13 \qquad \left(\frac{5^2-1}{2} + \frac{5^2+1}{2}\right)$

$7^2 = 49 = 24 + 25 \qquad (\qquad + \qquad)$

$11^2 = 121 = \ldots.. + \ldots.. \qquad \left(\frac{11^2-1}{2} + \frac{11^2+1}{2}\right)$

$15^2 = 225 = \ldots.. + \ldots.. \qquad (\qquad + \qquad)$

उक्त परिणामों के आधार पर हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि किसी रूढ़ संख्या (n) के वर्ग को दो क्रमागत संख्याओं के योग में इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है। $\left(\frac{n^2-1}{2} + \frac{n^2+1}{2}\right)$

6. क्रमागत वर्गों के मध्य संख्याएँ:

निम्न तालिका में रिक्त स्थान भरिए

क्रमागत वर्ग	क्रमागत वर्ग के मध्य संख्याएँ	संबंध
$1^2 = 1;\ 2^2 = 4$	2, 3 (1 और 4 के मध्य 2 संख्याएँ हैं)	2×प्रथम संख्या का आधार 1, (2×1=2)
$2^2 = 4;\ 3^2 = 9$	5, 6, 7, 8 (4 और 9 के मध्य 4 संख्याएँ हैं)	2×प्रथम संख्या का आधार 2, (2×2=4)
$3^2 = 9;\ 4^2 = 16$	10,11,12,13,14,15 (9 और 16 के मध्य 6 संख्याएँ हैं)	2×प्रथम संख्या का आधार 3 (2×3=6)
$4^2 = 16;\ 5^2 = 25$	....	2×प्रथम संख्या का आधार 4, (2×4=8)
$5^2 = 25;\ 6^2 = 36$	....	....
....	....	....

तालिका से क्रमागत वर्ग संख्याएँ और उनके मध्य संख्याओं का निरीक्षण कीजिए। क्या इनके मध्य कोई संबंध है?

तालिका की सहायता से n^2 और $(n + 1)^2$ के मध्य ऐसी संख्याएँ ज्ञात कीजिए जो वर्ग संख्या नहीं है। n^2 और $(n + 1)^2$ के मध्य '2n' संख्याएँ हैं जो वर्ग नहीं है।

इसे करें :

1. 9^2 और 10^2 के बीच कितनी संख्याएँ हैं जो पूर्ण वर्ग नहीं है?
2. 15^2 और 16^2 के बीच कितनी संख्याएँ हैं जो पूर्ण वर्ग नहीं है?

प्रयत्न करें :

रेहान कहता है कि 9^2 और 11^2 के बीच 37 संख्याएँ है जो पूर्ण वर्ग नहीं है। क्या वह सही है? कारण बताइए।

अभ्यास - 6.1

1. निम्न संख्याओं के इकाई स्थान पर कौन-सा अंक होगा?

   (i) 39 (ii) 297 (iii) 5125 (iv) 7286 (v) 8742

2. निम्न में कौन-सी संख्याएँ पूर्ण वर्ग हैं?

   (i) 121 (ii) 136 (iii) 256 (iv) 321 (v) 600

3. निम्न संख्याएँ पूर्ण वर्ग नहीं हैं। कारण बताइए।

   (i) 257 (ii) 4592 (iii) 2433 (iv) 5050 (v) 6098

4. ज्ञात कीजिए कि निम्न संख्याओं के वर्ग सम हैं या विषम ?

   (i) 431 (ii) 2826 (iii) 8204 (iv) 17779 (v) 99998

5. निम्न संख्याओं के वर्गों के मध्य कितनी संख्याएँ होती हैं?

   (i) 25; 26 (ii) 56; 57 (iii) 107;108

6. बिना जोड़े निम्न संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।

   (i) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 =$

   (ii) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 =$

   (iii) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 =$

6.3 पैथागोरस के त्रिक (Pythagorean Triplets)

माना

(i) $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$

(ii) $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$

संख्याएँ (3, 4, 5) और (5, 12, 13) पैथागोरस त्रिक के कुछ उदाहरण है।

सामान्यत: a, b, c धनात्मक पूर्णांक हैं । यदि $a^2 + b^2 = c^2$ तब a, b, c पैथागोरस त्रिक कहलाते हैं।

a,b,c के मध्य 1 के अतिरिक्त यदि कोई सामान्य खण्ड नहीं है तो त्रिक (a,b,c) रूढ़ त्रिक कहलाते हैं।

इसे करें

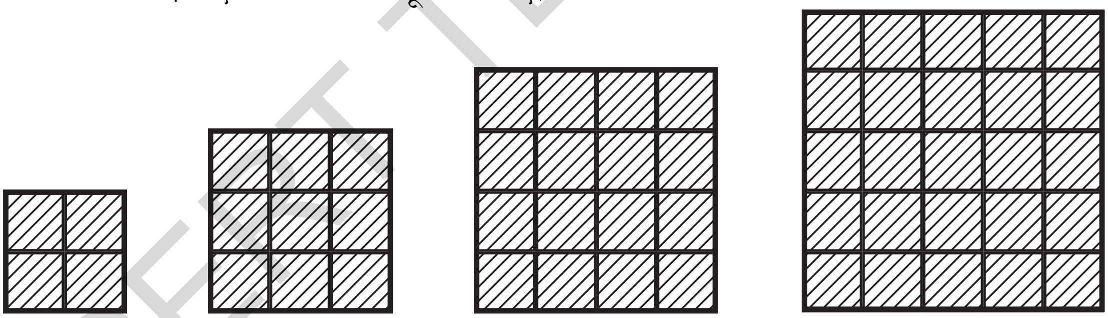
1. जाँच कीजिए कि क्या निम्न संख्याएँ पैथागोरस त्रिक बनाती हैं?

   (i) 2, 3, 4 (ii) 6, 8, 10 (iii) 9, 10, 11 (iv) 8, 15, 17

2. एक पैथागोरस त्रिक लीजिए। गुणक लिखिए। जाँच कीजिए कि क्या यह गुणक पैथागोरस त्रिक बनाते हैं।

6.4 वर्गमूल (Square Roots)

निम्न वर्गों को देखिए और तालिका पूर्ण कीजिए।



A = 4 A = 9 A = 16 A = 25

वर्ग का क्षेत्रफल (वर्ग सेमी) (A)	वर्ग की भुजा (सेमी) (S)
$4 = 2 \times 2$	2
$9 = 3 \times 3$	3
$16 = 4 \times 4$	______
$25 = 5 \times 5$	______

प्रत्येक स्तंभ एवं पंक्ति में वर्ग की इकाइयाँ वर्ग की भुजा दर्शाती हैं।

वर्ग के क्षेत्रफल और उसकी भुजा के मध्य क्या आप कोई संबंध देखते हैं?

हमें ज्ञात है कि वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा× भुजा = भुजा^{2}

यदि वर्ग का क्षेत्रफल169 वर्ग से.मी. हो तो भुजा ज्ञात करो।

माना वर्ग की भुजा 'x' से.मी. है ।

$\Rightarrow 169 = x^2$

वर्ग की भुजा ज्ञात करने के लिए ऐसी संख्या ज्ञात करना आवश्यक है जिसका वर्ग 169 है ।

हम जानते हैं कि $169 = 13^2$ तब भुजा की लम्बाई =13 से.मी.

अतः यदि किसी वर्ग संख्या को दो समान खण्डों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जाए तब वह खण्ड उस वर्ग संख्या का वर्गमूल कहलाता है। इस प्रकार यह वर्गीकरण का व्युत्क्रम है।

उदाहरण 1: $3^2 = 9$ अतः 9 का वर्गमूल 3($\sqrt{9} = 3$) है।

$4^2 = 16$ अतः 16 का वर्गमूल 4($\sqrt{16} = 4$) है।

$5^2 = 25$ अतः 25 का वर्गमूल 5($\sqrt{25} = 5$) है।

यदि $y^2 = x$ तब x का वर्गमूल y है$\left(\sqrt{x} = y\right)$

25 यह वर्ग है दोनों 5 और −5 का

अतः 25 का वर्गमूल है 5 या −5.

इस पाठ में हम केवल धनात्मक वर्गमूल अर्थात प्रधान वर्गमूल का ही अध्ययन करेंगे।

$\therefore \sqrt{25} = 5.$

उदाहरण 2:
1. $\sqrt{4} = 2$ क्योंकि $2^2 = 4$
2. $\sqrt{16} = 4$ क्योंकि $4^2 = 16$
3. $\sqrt{225} = 15$ क्योंकि $15^2 = 225$ आदि

निम्न तालिका को पूर्ण कीजिए।

वर्ग	वर्गमूल
$1^2 = 1$	$\sqrt{1} = 1$
$2^2 = 4$	$\sqrt{4} = 2$
$3^2 = 9$	$\sqrt{9} = 3$
$4^2 = 16$	$\sqrt{16} = 4$
$5^2 = 25$	$\sqrt{25} =$ ……..
$6^2 = 36$	$\sqrt{36} =$ ……..
$7^2 =$ ……...	$\sqrt{} =$ ……...
$8^2 =$ ……..	$\sqrt{} =$ ………
$9^2 =$ ……..	$\sqrt{} =$ ………
$10^2 =$ ……..	$\sqrt{} =$ ………

6.5 क्रमित विषम संख्याओं के व्यकलन द्वारा वर्गमूल ज्ञात करना:

हमें ज्ञात है कि, प्रत्येक वर्ग संख्या 1 से प्रारंभ होने वाली क्रमित विषम प्राकृतिक के योग के बराबर होता है।

माना, $1+3 = 4 = 2^2$

$1+3+5 = 9 = 3^2$

$1+3+5+7 = 16 = 4^2$

$1+3+5+7+9 = 25 = 5^2$

इस नमूने का विपरीत क्रम से वर्गमूल ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरणार्थ, $\sqrt{49}$ ज्ञात करो

चरण 1 $49-1=48$ (पहली विसम संख्या को घटाने पर)

चरण 2 $48-3=45$ (दूसरी विसम संख्या को घटाने पर)

चरण 3 $45-5=40$ (तीसरी विसम संख्या को घटाने पर)

चरण 4 $40-7=33$

चरण 5 $33-9=24$

चरण 6 $24-11=13$

चरण 7 $13-13=0$

> $1+3+5+7+9+11+13=7^2=49$
> $49-[1+3+5+7+9+11+13]=0$
> अत: 49 एक पूर्ण वर्ग है ।

49 से हमने सात क्रमागत विषम संख्याओं (1 से प्रारंभ) को घटाया है और 7 वें चरम में शून्य (0) प्राप्त किया है।

$\therefore \sqrt{49} = 7$

नोट: यदि इस क्रिया में परिणाम शून्य नहीं है तो दी गई संख्या एक पूर्ण वर्ग नहीं है।

इसे करें:

(i) आवर्ती व्यकलन द्वारा ज्ञात कीजिए कि निम्न संख्याएँ पूर्ण वर्ग है या नहीं?

(i) 55 (ii) 90 (iii) 121

आवर्ती व्यकलन क्रिया द्वारा किसी भी वर्ग संख्या का वर्ग मूल आसानी से ज्ञात किया जा सकता है। परन्तु बड़ी संख्याएँ जैसे 625, 729.......... के लिए यह क्रिया काफी समय लेगी। अत: सरल पद्धति द्वारा वर्गमूल ज्ञात करने का प्रयास करें।

दी गई संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात करने की दो विधियाँ हैं। वह हैं-

(i) रूढ़ गुणनखंड विधि

(ii) भाग विधि

6.6 रूढ़ गुणनखण्ड विधि द्वारा वर्गमूल ज्ञात करना:

484 का वर्गमूल रूढ़ गुणनखण्ड विधि द्वारा ज्ञात करें।

2	484
2	242
11	121
11	11
	1

चरण 1: संख्या (484) के रूढ़ गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हमें प्राप्त होता है $484 = 2 \times 2 \times 11 \times 11$

चरण 2: समान गुणनखण्डों के युग्म बनाइए।

$484 = (2 \times 2) \times (11 \times 11)$

$$484 = (2 \times 11) \times (2 \times 11) = (2 \times 11)^2$$
$$\sqrt{484} = \sqrt{(2\times11)^2}$$
$$= 2 \times 11$$
$$= 22$$

चरण 3: प्रत्येक युग्म से एक खण्ड चयनित करने से

हमें प्राप्त होगा

$\sqrt{484} = 2 \times 11 = 22$

अतः 484 का वर्गमूल 22 है।

अब हम कुछ और उदाहरण देखते हैं।

उदाहरण 3 : 1296 का वर्गमूल रूढ़ गुणनखण्ड विधि द्वारा ज्ञात कीजिए।

हल: 1296 को रूढ़ गुणनखण्डों में विभाजित करने पर

$1296 = (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3)$

$\sqrt{1296} = 2 \times 2 \times 3 \times 3$

$\therefore \sqrt{1296} = 36$

2	1296
2	648
2	324
2	162
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

उदाहरण 4 : 1764 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल : 1764 को रूढ़ गुणनखण्डों में विभाजित करने पर

$1764 = (2 \times 2) \times (3 \times 3) \times (7 \times 7)$

$\sqrt{1764} = 2 \times 3 \times 7$

$\therefore \sqrt{1764} = 42$

2	1764
2	882
3	441
3	147
7	49
7	7
	1

उदाहरण 5: ऐसी न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जिससे विभाजित करने पर 720 एक पूर्ण वर्ग बन जाएगा।

हल : 720 को रूढ़ गुणनखण्डों में विभाजित करने पर, हमें प्राप्त होता है

2	720
2	360
2	180
2	90
3	45
3	15
5	5
	1

$720 = (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (3 \times 3) \times 5$

हम देखते हैं कि 2, 2, 3 युग्म में उपस्थित हैं जब कि 5 एकल है

अतः दी गई संख्या को 5 से गुणा करने पर पूर्ण वर्ग प्राप्त होगा।

इस प्रकार प्राप्त पूर्ण वर्ग है

$720 \times 5 = 3600$

उदाहरण 6: वह न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 6000 को भाग देने पर वह पूर्ण वर्ग होगा। परिणामी संख्या का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल: 6000 को रूढ़ गुणनखण्डों में विभाजित करने पर

2	6000
2	3000
2	1500
2	750
3	375
5	125
5	25
5	5
	1

$6000 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5$

हम देखते हैं कि 2, 2, और 5 जोड़ियों में उपस्थित हैं परन्तु

3 और 5 जोड़ियों में नहीं है

अतः दी गई संख्या को $3 \times 5 = 15$ से विभाजित करना होगा।

इस प्रकार प्राप्त पूर्ण वर्ग $= 6000 \div 15 = 400$

$400 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$

400 का वर्गमूल होगा।

2	400
2	200
2	100
2	50
5	25
5	5
	1

$$\sqrt{400} = \sqrt{(2\times2)\times(2\times2)\times(5\times5)}$$
$$= 2 \times 2 \times 5$$
$$= 20$$

अभ्यास - 6.2

1. निम्न संख्याओं के वर्गमूल रूढ़ गुणनखण्ड विधि द्वारा ज्ञात किजिए।

   (i) 441 (ii) 784 (iii) 4096 (iv) 7056

2. ऐसी न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 3645 को गुणा करने पर कह एक पूर्ण वर्ग होगा।

3. 2400 को कौन-सी न्यूनतम संख्या से गुणा करना होगा कि वह एक पूर्ण वर्ग हो जाये। परिणामी संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात करो।

4. 7776 को किस न्यूनतम संख्या से विभाजित करने पर वह एक पूर्ण वर्ग होगा?

5. एक बगीचे में 1521 वृक्ष इस प्रकार लगाए गए हैं कि प्रत्येक कतार में वृक्षों की संख्या, कतारों की संख्या के बराबर है। कतारों की संख्या और प्रत्येक कतार में वृक्षों की संख्या ज्ञात करो।

6. एक पाठशाला में विद्यार्थियों से शुल्क के रूप में 2601 प्राप्त किया गया। यदि प्रत्येक विद्यार्थी द्वारा जमा शुल्क और पाठशाला विद्यार्थियों की संख्या समान हो तो पाठशाला में विद्यार्थियों की संख्या क्या थी?

7. दो संख्याओं का गुणनफल 1296 है। यदि एक संख्या दूसरी संख्या 16 गुणा है तो दोनों संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

8. 7921 सैनिक एक ऑडिटोरियम में इस प्रकार बैठे हैं कि प्रत्येक कतार में सैनिकों की संख्या और कतारों की संख्या समान है। ऑडिटोरियम में कितनी कतारें हैं?

9. वर्गाकार खेत का क्षेत्रफल 5184 वर्ग मीटर है। एक आयताकार खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी परिमिति वर्गाकार खेत की परिमिति के समान है और जिसकी लंबाई उसकी चौड़ाई दुगनी है।

6.7 भाग विधि द्वारा वर्गमूल ज्ञात करना :

$|7\overline{84}|$

प्राकृतिक संख्याओं के वर्गमूल गुणनखण्ड विधि की सहायता से ज्ञात करने की विधि हमने सीखी। बड़ी संख्याओं के लिए यह विधि लम्बी एवं कठिन हो जाती है। अतः इस समस्या का हल प्राप्त करने के लिए हम भाग विधि का उपयोग करते हैं।

784 का वर्गमूल भाग विधि द्वारा ज्ञात करें।

चरण 1 : दी गई संख्या के इकाई स्थान पर उपस्थित अंक से शुरू कर संख्या को दो समूह में बाँटिए। प्रत्येक समूह पर एक रेखा खींचिए।

$2\,|\,7\overline{84}\,|\,2$

चरण 2 : एक अधिकतम संख्या ज्ञात कीजिए जिसका वर्ग पहले समूह के बराबर या उससे कम हो या दाएँ पहली अंक (i.e. 2) इसे भाजक और भागफल लीजिए।

$2\,|\,7\overline{84}\,|\,2$, 4, 3

चरण 3 : भाजक एवं भागफल के गुणनफल $(2 \times 2 = 4)$ को पहले अंक या पहले समूह से घटाइए (i.e. $7 - 4 = 3$)

$2\,|\,7\overline{84}\,|\,2$, -4, 384

चरण 4 : दूसरे समूह (i.e. 84) को शेष (i.e. 3) के दाहिनी ओर नीचे लाइए। यह नया भाज्य हो जाएगा (अर्थात् 384)

$2\,|\,7\overline{84}\,|\,2$, -4, $4\square\,|\,384$

चरण 5 : अगले संभावित भाजक से भागफल को दुगुना (अर्थात् $2 \times 2 = 4$) कीजिए और उसके दाहिनी ओर के बाक्स में लिखिए।

$$\begin{array}{r|c|l} 2 & \overline{7}\,\overline{84} & 28 \\ & -4 & \\ \hline 4\boxed{8} & 384 & \\ & 384 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

चरण 6 : अधिकतम संभावित अंक ज्ञात कीजिए ताकि उसे बॉक्स में लिखने पर नए भाजक और इस अंक का गुणनफल नए भाज्य (अर्थात् $48 \times 8 = 384$) बराबर था उससे कम हो।

$$\begin{array}{r|c|l} 2 & \overline{7}\,\overline{84} & 28 \\ & -4 & \\ \hline 48 & 384 & \\ & -384 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

चरण 7 : घटाने पर शेष शून्य प्राप्त होता है। परिणामी भागफल 28 वर्गमूल है

$\therefore \sqrt{784} = 28$

सोचो, चर्चा करो और लिखो :

निम्न विभाजन का निरिक्षण कीजिए। कारण बताइए कि ऊपरी उदाहरण में भाजक 48 में $\boxed{8}$ ही क्यों लिया गया है?

$$4\overline{)\,384\,}\;(9 \qquad 4\overline{)\,384\,}\;(8 \qquad 4\overline{)\,384\,}\;(7$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{r} 36 \\ \hline 24 \\ 81 = 9^2 \end{array} & \begin{array}{r} 32 \\ \hline 64 \\ 64 = 8^2 \end{array} & \begin{array}{r} 28 \\ \hline 104 \\ 49 = 7^2 \end{array} \end{array}$$

कुछ उदाहरण देखेंगे

उदाहरण7: 1296 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए ।

हल :

चरण 1 $\quad \overline{12}\,\overline{96}$

चरण 2
$$\begin{array}{r|c|l} 3 & \overline{12}\,\overline{96} & 3 \\ & 9 & \end{array}$$

चरण 3
$$\begin{array}{r|c|l} 3 & \overline{12}\,\overline{96} & 3 \\ & -9 & \end{array}$$

चरण 4
$$\begin{array}{r|c|l} 3 & \overline{12}\,\overline{96} & 3 \\ & -9 & \\ \hline 6 & 396 & \end{array}$$

चरण 5
$$\begin{array}{r|c|l} 3 & \overline{12}\,\overline{96} & 36 \\ & -9 & \\ \hline 66 & 396 & \\ & -396 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|l} a & a^2 + 2ab + b^2 & a + b \\ a & a^2 & \\ \hline 2a + b & 2ab + b^2 & b(2a + b) = 2ab + b^2 \\ & 2ab + b^2 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

ध्यान दीजिए

$$6\overline{)\,396\,}\;(6$$
$$\begin{array}{r} 36 \\ \hline 36 \\ 36 = 6^2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$\therefore \sqrt{1296} = 36$

उदाहरण 8: 8281 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\begin{array}{r|l|l} 9 & \overline{82}\,\overline{81} & 91 \\ & -81 & \\ \hline 181 & \;\;181 & \\ & -181 & \\ \hline & \;\;\;0 & \end{array}$$

इसलिए $\sqrt{8281} = 91$

देखिए
$\begin{array}{l} 18)\overline{181}\;\;(1 \\ \;\;\;\;\;18 \\ \hline \;\;\;\;\;\;1 \\ \;\;\;\;\;\;1 = 1^2 \\ \hline \;\;\;\;\;\;0 \end{array}$

उदाहरण 9: चार अंकों वाली अधिकतम संख्या ज्ञात कीजिए जो एक पूर्ण वर्ग है।

हल: सबसे बड़ी चार अंकों वाली संख्या है 9999

भाग विधि द्वारा 9999 का वर्गमूल ज्ञात करेंगे

शेष 198 दर्शाता है कि 9999 से वह संख्या 198

यदि 9999 में से 198 घटाया जाए तो एक पूर्ण वर्ग प्राप्त होगा।

$\therefore$ 9999 – 198 = 9801 आवश्यक पूर्ण वर्ग है।

$$\begin{array}{r|l|l} 9 & \overline{99}\,\overline{99} & 99 \\ & -81 & \\ \hline 189 & \;18\,99 & \\ & -17\,01 & \\ \hline & \;\;\;1\,98 & \end{array}$$

उदाहरण 10: वह न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिये जिसे 4215 से घटाने पर पूर्ण वर्ग प्राप्त होगा?

हल : भाग विधि द्वारा शेष है 119

अर्थात् यदि 4215 से 119 घटाया जाए तो एक पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त होगी।

अतः वह आवश्यक न्यूनतम संख्या 119 है।

$$\begin{array}{r|l|l} 6 & \overline{42}\,\overline{15} & 64 \\ & -36 & \\ \hline 1 & \;\;6\,15 & \\ 124 & -4\,96 & \\ \hline & \;\;1\,19 & \end{array}$$

6.8 भाग विधि द्वारा दशमलव संख्याओं के वर्गमूल :

उदाः $\sqrt{17.64}$ का वर्गमूल ज्ञात करें।

चरण 1: संख्या के पूर्णांक भाग पर एक रेखा खींचिए। अर्थात् 17 पर। बाएं से दाएँ दशमलव की प्रत्येक जोड़ी पर रेखा खींचिए।

$\left|\overline{17}.\overline{64}\right|$

चरण 2: वह अधिकतम संख्या ज्ञात कीजिए (अर्थात् 4) जिसका वर्ग पहले पूर्णांक जोड़ी (17) के बराबर हो या उससे कम हो। इस संख्या 4 को भाजक और पहली जोड़ी 17 को भाज्य लीजिए। शेष 1 प्राप्त करें। भाग दीजिए और शेष प्राप्त करें अर्थात् 1

$$\begin{array}{r|l|l} 4 & \overline{17}\,.\,\overline{64} & 4 \\ & -16 & \\ \hline & \;\;1 & \end{array}$$

चरण 3: अगली जोड़ी (64) को शेष के दाहिनी ओर लिखकर 164 प्राप्त करें। यह नया भाज्य होगा।

$$\begin{array}{r|l|l} 4 & \overline{17}.\overline{64} & 4 \\ & -16 & \\ \hline & \;\;1.64 & \end{array}$$

चरण 4: भागफल को दुगुना कीजिए ($2 \times 4 = 8$) और 8 लिखकर दाहिनी ओर एक डिब्बा बनाइए 64 दशमलव भिन्न वाला भाग है अतः भागफल में दशमलव बिन्दु लगाइए।

$$\begin{array}{r|l|l} 4 & \overline{17}.\overline{64} & 4 \\ & -16 & \\ \hline 8\square & -164 & \end{array}$$

चरण 5: उस अंक का अनुमान लगाइए जिसे लिखने पर आए भाजक एवं उस अंक का गुणनफल भाज्य 164 के बराबर या उससे कम हो। यहाँ पर वह अंक 2 है। विभाजित करें और शेष प्राप्त करें।

$$\begin{array}{r|r|l} 4 & \overline{17}.\overline{64} & 4.2 \\ & -16 & \\ \hline 8\boxed{2} & 164 & \\ & -164 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

चरण 6: शेष शून्य है और कोई जोड़ी बाकी नहीं है।

$\sqrt{17.64} = 4.2$

अब हम कुछ और उदाहरण देखेंगे।

उदाहरण 11: भाग विधि द्वारा 42.25 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल :

चरण 1 :

$$\begin{array}{r|l|l} 6 & \overline{42}.\overline{25} & 6 \\ & -36 & \\ \hline & \ \ 6 & \end{array}$$

चरण 2 :

चरण 3 :

$$\begin{array}{r|r|l} 6 & \overline{42}.\overline{25} & 6.5 \\ 6 & -36 & \\ \hline 125 & 625 & \\ & -625 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

$\therefore \sqrt{42.25} = 6.5$.

उदाहरण 12: $\sqrt{96.04}$ ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\begin{array}{r|r|l} 9 & \overline{96}.\overline{04} & 9.8 \\ 9 & -81 & \\ \hline 188 & 1504 & \\ & -1504 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

इसलिए $\sqrt{96.04} = 9.8$

6.9 ऐसी संख्याओं के वर्गमूल का अनुमान लगाना जो पूर्ण वर्ग नहीं हैं :

अब तक हमने पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल ज्ञात करना सीखा। यदि संख्याएँ पूर्ण वर्ग नहीं है तो हम सही वर्गमूल नहीं ज्ञात कर सकेंगे। ऐसे में हमें वर्गमूल निर्धारित करना होगा।

$\sqrt{300}$ का अनुमान निकटतम पूर्ण संख्या तक कीजिए।

300 दो पूर्ण वर्ग 100 और 400 के बीच रहता है।

$\therefore\ 100 < 300 < 400$

$10^2 < 300 < 20^2$

अर्थात $10 < \sqrt{300} < 20$

परन्तु फिर भी हम वर्ग संख्या के निकट नहीं हैं। हमें ज्ञात है कि $17^2 = 289,\ 18^2 = 324$

इसलिए $289 < 300 < 324$

$$17 < \sqrt{300} < 18$$

324 की तुलना में 289 निकटतम है 300 के

अतः $\sqrt{300}$ का लगभग मान 17 है।

अभ्यास - 6.3

1. भाग विधि द्वारा निम्न संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

   (i) 1089 (ii) 2304 (iii) 7744 (iv) 6084 (v) 9025

2. निम्न दशमलव संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

   (i) 2.56 (ii) 18.49 (iii) 68.89 (iv) 84.64

3. वह न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 4000 से घटाने पर एक पूर्ण वर्ग प्राप्त होगा?

4. 4489 वर्ग से.मी. क्षेत्रफल वाले वर्ग की भुजा ज्ञात कीजिए।

5. एक माली वर्गाकार में 8289 पौधे लगाना चाहता है। इस प्रकार लगाने पर 8 पौधे शेष रह जाते हैं। तो प्रत्येक पंक्ति में कितने पौधे लगाए गए हैं?

6. चार अंकों वाली न्यूनतम पूर्ण वर्ग संख्या ज्ञात कीजिए।

7. ऐसी न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 6412 को जोड़ने पर एक पूर्ण वर्ग बन जाए।

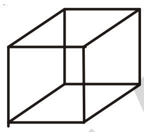
8. निम्न संख्याओं के मान निकटतम पूर्ण संख्या तक ज्ञात कीजिए।

   (i) $\sqrt{97}$ (ii) $\sqrt{250}$ (iii) $\sqrt{780}$

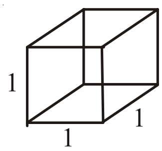
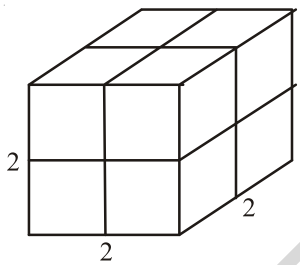
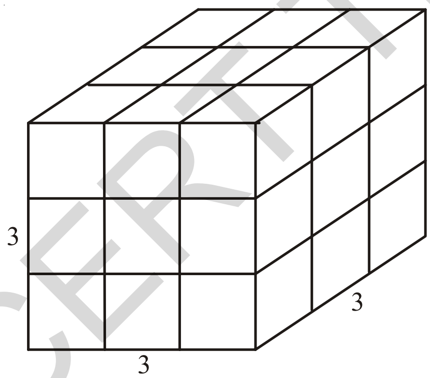
घन एवं घनमूल

6.10 परिचय

हम जानते हैं कि घन एक गेस आकृति है जिसमें छः समान वर्ग होते हैं ।



इकाई घनों द्वारा अब हम कुछ घन आकार बनाएँ

क्र.सं.	आकृति	भुजा की लंबाई	उपर्युक्त इकाई घन की संख्या
1		1	1
2		2	8
3		3	27

क्या आप अगली घन आकृति बना सकते है? अनुमान लगाइए कि 5 इकाई भुजा वाले घन को बनाने के लिए कितने इकाई घन उपयोग करने होंगे?

अतः, हमें 1, 8, 27, 64 …….. इकाई घन की आवश्यकता होगी।

यह संख्याएँ 1, 8, 27, 64 …… कहलाते हैं घन संख्याएँ या पूर्ण घन।

क्योंकि $\quad 1 = 1 \times 1 \times 1 = 1^3$

$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

$27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$

$64 = \ldots\ldots.. \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots =$

अतः किसी संख्या को स्वयं से तीन बार गुणा करने पर जो संख्या प्राप्त होती है उसे घन संख्या कहते हैं।

अर्थात् किसी संख्या 'x' का घन है $x \times x \times x = x^3$

क्या 49 एक घन संख्या है ? नहीं। क्योंकि $49 = 7 \times 7$ और कोई ऐसी संख्या नहीं है जिसे स्वयं से तीन बार गुणा करने पर 49 प्राप्त हो। हम जानते हैं कि $3 \times 3 \times 3 = 27$ और $4 \times 4 \times 4 = 64$ यह दर्शाता है कि 49 एक पूर्ण घन नहीं है।

प्रयास करें :

1. क्या 81 एक पूर्ण घन है?
2. क्या 125 एक पूर्ण घन?

निम्न सारिणी का निरीक्षण कर पूरा कीजिए।

संख्या	घन
1	$1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$
2	$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$
3	$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$
4	$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$
5	$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$
6	$6^3 = 6 \times 6 \times 6 = \ldots\ldots\ldots$
7	$7^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots..$
8	$8^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots..$
9	$9^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots..$
10	$10^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots..$

सोचो, चर्चा करो और लिखो

(i) 1 और 100, 1 और 500, 1 और 1000 के मध्य कितनी पूर्ण घन संख्याएँ हैं?

(ii) 500 और 1000 के मध्य कितनी घन संख्याएँ हैं?

11 और 20 के मध्य की पूर्ण घन संख्याएँ निम्न हैं ।

संख्या	घन
11	1331
12	1728
13	2197
14	2744
15	3375
16	4096
17	4913
18	5832
19	6859
20	8000

क्या आप 17 और 18 के घन के अंकों के योग में कोई रुचिकर बात है?

सारिणी से हम यह देखते हैं कि प्रत्येक सम संख्या का घन एक सम संख्या है। क्या यह विषम संख्याओं के लिए भी सही है?

हम यह भी देखते हैं कि, यदि किसी संख्या के इकाई स्थान पर 1 है तो उसके घन का अन्त भी 1 से होता है।

इसी प्रकार, किसी संख्या के इसके स्थान पर 0, 4, 5, 6 या 9 हो तो उसके घन के इकाई स्थान के अंक के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

प्रयास कीजिए :

1. निम्न संख्याओं के इकाई स्थान का अंक ज्ञात कीजिए।

(i) 75^3 (ii) 123^3 (iii) 157^3 (iv) 198^3 (v) 206^3

6.11 कुछ दिलचस्प उदाहरण :

1. क्रमागत विषम संख्याओं को जोड़िए। निम्न प्रतिमान देखिए।

$1 = 1 = 1^3$

$3 + 5 = 8 = 2^3$

$7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$

$13 + 15 + 17 + 19 = \ldots\ldots = \ldots\ldots$

ज्ञात कीजिए कि आगामी कितनी क्रमागत विषम संख्याएँ 5^3 योग ज्ञात करने के लिए आवश्यक होंगी?

2. निम्न प्रतिमान पर ध्यान दीजिए।

$2^3 - 1^3 = 1 + 2 \times 1 \times 3 = 7$

$3^3 - 2^3 = 1 + 3 \times 2 \times 3 = 19$

$4^3 - 3^3 = 1 + 4 \times 3 \times 3 = 37$

$5^3 - 4^3 =$ …………….. = ...

ऊपरी प्रतिमान का उपयोग कर निम्न के मूल्य ज्ञात कीजिए।

(i) $10^3 - 9^3$ (ii) $15^3 - 14^3$ (iii) $26^3 - 25^3$

3. निम्न प्रतिमान का निरीक्षण करें और पूरा कीजिए।

$1^3 = 1^2$

$1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2 = (3)^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2 = (\ )^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (\_\_\_\_\_)^2$

………………….. $= (1 + 2 + 3 + ... + 10)^2$

अतः सामान्यतः हम कह सकते हैं कि

प्रथम 'n' प्राकृतिक संख्याओं के घनों का योग, उनके योग के बराबर होता है।

अर्थात् $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$.

6.12 घन एवं अनेक रूढ़ खण्ड :

संख्याएँ 64 और 216 की कल्पना कीजिए।

64 और 216 को रूढ़ गुणनखण्डों में विभाजित करने पर

$64 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2}$

$216 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{3 \times 3 \times 3}$

दोनों में प्रत्येक खण्ड तीन बार आता है। रूढ़ गुणनखण्डों को तीन-तीन के समूह में लिख सकते हैं।

इस प्रकार, यदि किसी संख्या को तीन समान खण्डों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सके तो उसे पूर्ण घन या घन संख्या कहते हैं।

क्या 540 एक पूर्ण घन है ?

540 को रूढ़ गुणनखण्डों में विभाजित करने पर

$540 = 2 \times 2 \times \cancel{3 \times 3 \times 3} \times 5$

यहाँ, 2 और 5 तीन के समूह में प्राप्त नहीं है ।

अतः 540 एक पूर्ण घन नहीं है ।

2	540
2	270
3	135
3	45
3	15
5	5
	1

यह कीजिए

1. निम्न में कौन-सी संख्याएँ पूर्ण घन हैं ?

(i) 243 (ii) 400 (iii) 500 (iv) 512 (v) 729

उदाहरण 13: ऐसी न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 2560 को गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल एक पूर्ण घन होगा?

हल : 2560 का रूढ़ गुणनखण्डों में विभाजित करने पर

$2560 = \overline{2 \times 2 \times 2} \times \overline{2 \times 2 \times 2} \times \overline{2 \times 2 \times 2} \times 5$

रूढ़ खण्ड 5 तीन के समूह में प्राप्त नहीं है।

इसलिए 2560 एक पूर्ण धन नहीं है।

अतः वह न्यूनतम संख्या जिससे गुणा करने पर 2560 पूर्ण घन होगा वह है $5 \times 5 = 25$

2	2560
2	1280
2	640
2	320
2	160
2	80
2	40
2	20
2	10
	5

उदाहरण 14: ऐसी न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 1600 को विभाजित करने पर वह एक पूर्ण घन हो जाएगा।

हल: 1600 को रूढ़ गुणनखण्डों में विभाजित करने पर

$1600 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{2 \times 2 \times 2} \times 5 \times 5$

रूढ़ खण्ड 5 तीन के समूह में नहीं है।

अतः 1600 एक पूर्ण घन नहीं है।

इसलिए, वह न्यूनतम संख्या जिससे 1600 के भाग देने पर वह पूर्ण घन हो जाएगा $5 \times 5 = 25$

2	1600
2	800
2	400
2	200
2	100
2	50
5	25
	5

अभ्यास - 6.4

1. निम्न संख्याओं के घन ज्ञात कीजिए।

    (i) 8 (ii) 16 (iii) 21 (iv) 30

2. जाँच कीजिए कि निम्न संख्या पूर्ण घन है या नहीं।

    (i) 243 (ii) 516 (iii) 729 (iv) 8000 (v) 2700

3. वह न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जिससे गुणा करने पर 8788 एक पूर्ण घन बन जाए।
4. 7803 को किस न्यूनतम संख्या से गुणा करने पर वह गुणनफल एक पूर्ण घन होगा।
5. ऐसी न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जिससे भाग देने पर वह एक पूर्ण घन होगा।
6. रवि ने एक प्लास्टिक का घनाभ बनाया जिसके परिमाण 12सेमी, 8सेमी और 3सेमी हैं। एक घन बनाने के लिए ऐसी न्यूनतम कितने घनाभ की आवश्यकता होगी?
7. कितने घनाभ की आवश्यकता होगी ?

6.13 घनमूल

हम जानते हैं कि 2 इकाई भुजा वाला घन बनाने के लिए हमें 8 इकाई घनों की आवश्यकता है। ($2^3 = 8$) इसी प्रकार 3 इकाई भुजा वाला घन बनाने के लिए घन की 27 इकाइयाँ आवश्यक होगी ($3^3 = 27$)

माना 64 इकाई घनों से एक घन बनाया गया तो घन की भुजा क्या होगी?

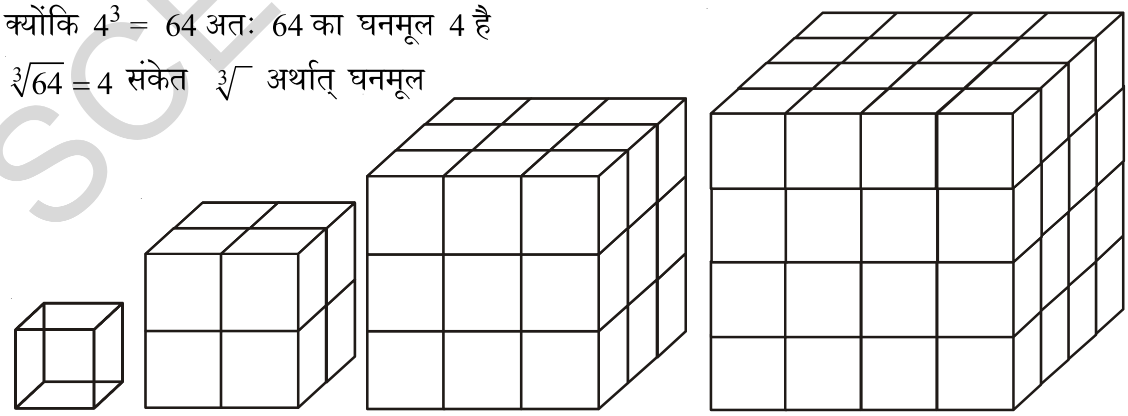
माना कि भुजा की लम्बाई 'x'

$\therefore \quad 64 = x^3$

एक घन की भुजा ज्ञात करने के लिए, एक ऐसी संख्या ज्ञात करनी होगी जिसका घन 64 है। अतः ऐसी संख्या मालम करना जिसका घन ज्ञात है इसका घनमूल ज्ञात करना है। यह घन ज्ञात करने के विपरीत क्रिया है।

क्योंकि $4^3 = 64$ अतः 64 का घनमूल 4 है

$\sqrt[3]{64} = 4$ संकेत $\sqrt[3]{\ }$ अर्थात् घनमूल



(1 घन इकाई)

इस प्रकार एक संख्या 'x' घनमूल होता है दूसरी संख्या y का। यदि $y = x^3$ तब $x = \sqrt[3]{y}$.

निम्न तालिका को पूरा कीजिए :

घन			घनमूल		
1^3	=	1	$\sqrt[3]{1}$	=	1
2^3	=	8	$\sqrt[3]{8}$	=	2
3^3	=	27	$\sqrt[3]{27}$	=	3
4^3	=	64	$\sqrt[3]{64}$	=	4
5^3	=	125	$\sqrt[3]{125}$	=	5
6^3	=	......	$\sqrt[3]{}$	=	6
7^3	=	....	$\sqrt[3]{}$	=	7
8^3	=	......	$\sqrt[3]{}$	=	8
......	=	....	....	=	....
......	=	....	....	=	....

6.14 रूढ़ गुणनखण्ड विधि द्वारा घनमूल ज्ञात करना:

आइए, 1728 का घनमूल रूढ़ गुणनखण्ड विधि द्वारा ज्ञात करें।

चरण 1 : 1728 को रूढ़ गुणनखण्डों में विभक्त कीजिए।

$1728 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

चरण 2 : तीन समान खण्डों के समूह बनाइए।

$1728 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3)$

चरण 3: प्रत्येक समूह से एक खण्ड लीजिए और गुणा कीजिए।

ऐसा करने पर

$\sqrt[3]{1728} = 2 \times 2 \times 3 = 12$ प्राप्त होता है।

$\therefore \sqrt[3]{1728} = 2 \times 2 \times 3 = 12$

2	1728
2	864
2	432
2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
	3

कुछ और उदाहरण देखें।

उदाहरण15: 4096 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

हल : रूढ़ खण्डों में 4096 को विभक्त करने पर

$4096 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)$

$\sqrt[3]{4096} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

$\therefore \sqrt[3]{4096} = 16$

2	4096
2	2048
2	1024
2	512
2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
	2

6.15 किसी संख्या के घनमूल का अनुमान लगाना :

यदि हम किसी दी गई संख्या की घन संख्या जानते हैं तो उसका घनमूल ज्ञात करने के लिए निम्न विधि का उपयोग किया जा सकता है।

अनुमान द्वारा 9261 का घनमूल ज्ञात करेंगे।

चरण 1: इकाई स्थान से शुरू कर तीन-तीन अंकों के समूह बनाना प्रारम्भ कीजिए।

अर्थात् 9	261
दूसरा समूह	पहला समूह

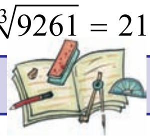
चरण 2: पहले समूह 261 से हमें घनमूल की संख्या का इकाई स्थान प्राप्त होगा। 261 के इकाई स्थान पर 1 है और घनमूल का भी 1 अतः घनमूल के इकाई स्थान में 1 होगा।

चरण 3: दूसरा समूह अर्थात् 9 लिजिए।

हम जानते हैं कि $2^3 < 9 < 3^3$.

न्यूनतम संख्या 2 है अतः यह घनमूल दहाई के स्थान में होगी।

$\therefore \sqrt[3]{9261} = 21$



अभ्यास - 6.5

1. रूढ़ गुणनखण्ड विधि द्वारा निम्न संख्याओं का घनमूल ज्ञात कीजिए।
   (i) 343 (ii) 729 (iii) 1331 (iv) 2744
2. अनुमान द्वारा निम्न संख्याओं का घनमूल ज्ञात कीजिए।
   (i) 1512 (ii) 2197 (iii) 3375 (iv) 5832
3. सत्य या असत्य बताइए।
   (i) एक सम संख्या का घन विषम होता है।
   (ii) एक पूर्ण घन के अन्त में दो शून्य हो सकते हैं।
   (iii) यदि किसी संख्या का अन्त 5 से होता है तो उसके घन का अंतिम अंक भी 5 होगा।
   (iv) यदि किसी संख्या का अन्त शून्य से होता है तो उसके घन के दाई और तीन शून्य होते हैं।
   (v) एक अंक वाली संख्या का घन एक अंकीय संख्या हो सकती है।
   (vi) ऐसी कोई पूर्ण घन संख्या नहीं है जिसका अंत 8 से होता हो।
   (vii) **दो अंकीय संख्या का घन एक तीन अंकीय संख्या हो सकती है।**
4. वह दो अंकीय संख्या ज्ञात कीजिए जो एक वर्ग संख्या है और साथ ही धन संख्या भी।

हमने क्या सीखा

- वर्ग संख्याओं का प्रतिमान।
- एक वर्ग संख्या में अंकों की संख्या अनुमानित करना।
- वर्ग संख्याओं में कुछ प्रतिमान।
- पैथागोरस त्रिक।
- रूढ़ गुणनखण्ड विधि और भाग विधि द्वारा वर्गमूल ज्ञात करना।
- ऐसी संख्याओं का वर्गमूल ज्ञात करना (अनुमान लगाना) जो पूर्ण वर्ग नहीं है।
- रूढ़ गुणनखण्ड विधि द्वारा घनमूल ज्ञात करना।
- किसी संख्या के घनमूल को अनुमानित करना।

अंत:त्रिभुज

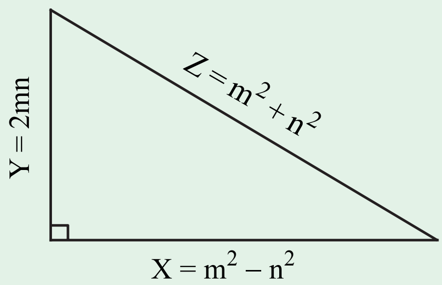
डिपोहंटस के समय और प्राचीन ग्रीक में भी समकोण त्रिभुज की भुजाओं को ज्ञात करने का सूत्र प्रचलित था। वह है-

एक भुजा $X = m^2 - n^2$

दूसरी भुजा $Y = 2mn$

कर्ण $Z = m^2 + n^2$

जहाँ m और n कोई दो पूर्णांक हैं।



उदाहरण

m	n	$X = m^2 - n^2$	$Y = 2mn$	$Z = m^2 + n^2$
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
5	2	21	20	29
4	3	7	24	25
4	1	15	8	27

अध्याय **7**

बारंबारिता बंटन तालिका और आलेख

(FREQUENCY DISTRIBUTION TABLES AND GRAPHS)

7.0 परिचय

जगदीश T.V. पर खेल समाचार देख रहा था। टी.वी.स्क्रीन पर विभिन्न देशों के ओलंपिक खेल वर्ष 2012 के दिखा रहा था, विभिन्न पदकों के बारे में ।

ओलंपिक 2012 - पदकों की तालिका

पद	देश	सोना	चाँदी	कांसा	कुल
1	अमेरिका	46	29	29	104
2	चीन	38	27	23	88
3	ग्रेट ब्रिटेन	29	17	19	65
4	रशिया	24	26	32	82
5	कोरिया	13	8	7	28

उपरोक्त तालिका पाँच प्रमुख देशों के द्वारा प्राप्त (ओलंपिक 2012) को दर्शाता है।

सूचना, संख्या सूचक या शब्दीक सूचक या आलेखिय सूचक यह निर्णय लेने में या उपसंहार के आँकडों को कहते हैं ।

- किस देश को सबसे अधिक पदक मिले ?
- किस देश को सबसे अधिक काँसे के पदक मिले ?
- दिए गए दलों की तालिका से और तीन प्रश्न बनाओं ।

इसे कीजिए :

तीन उदाहरण दीजिए जिसमें आँकडें शब्दीक हो और तीन में अंक हो ।

7.1 केन्द्रीय प्रवृत्ति का बुनियादी मापन

जब हम आंकड़ों को इकट्ठा करते हैं तब हमें उपसंहार की आवश्यकता पड़ती है। बुनियादी आंकड़ों के लिए कभी हम कुल, कभी औसत का उपयोग करते हैं। पिछली कक्षा में हमने पढ़ा कि बुनियादी मापन जैसे मध्यमान, बहुलक और माध्यिमका, उसका स्मरण करेंगे।

7.1.1 मध्यमान (Arithmatic Mean)

समानांतर माध्य या मध्यमान केन्द्रीय प्रवृत्ति का सबसे सामान्य और विस्तृत रूप से उपयोगी मापन है। सांख्यिकीय दलों का मध्यमान सभी राशियों के योग को राशियों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त भागफल होता है।

$\sum x_i$ सूचित करता है कि x_i का योग और 1 से n तक का मूल्य

समानांतर माध्य $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\ldots. x_n$ में

समानांतर माध्य $= \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots\ldots + x_n}{N}$

$\bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{N}$ (संक्षिप्त वर्णन)

उदाहरण 1: अशोक को विभिन्न विषयों में इकाई परीक्षा में 20, 11, 21, 25, 23 और 14 इस प्रकार अंक मिले तो इन अंकों का समानांतर माध्य ज्ञात कीजिए ।

हल: निरीक्षण = 20, 11, 21, 25, 23 and 14

समानांतर माध्य $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{N}$

$= \dfrac{20+11+21+25+23+14}{6} = \dfrac{114}{6}$

$\bar{x} = 19$

उदाहरण 2: 7 निरीक्षणों का मध्यमान 32 पाया गया । यदि एक और निरीक्षण 48 दलों में जोड़ा गया तो वास्तविक मध्यमान क्या होगा ?

हल : 7 निरीक्षण का मध्यमान $\bar{x} = 32$

7 निरीक्षणों का योग $\sum x_i = 32 \times 7 = 224$

जोड़ा गया निरीक्षण $= 48$

8 निरीक्षणों का योग $\sum x_i = 224 + 48 = 272$

$\therefore$ 8 निरीक्षणों का मध्यमान $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{N} = \dfrac{272}{8} = 34$

उदाहरण 3: 25 व्यक्तियों की मध्य आयु 38 वर्ष है एक क्लब की यदि 5 व्यक्तियों की मध्य आयु 42 क्लब में छूट गये तो उपस्थित मध्य आयु क्लब के व्यक्तियों की होगी?

हल: 25 व्यक्तियों की माध्य आयु एक क्लब की = 38 वर्ष

25 व्यक्तियों की कुल आयु = 38×25 = 950

5 व्यक्तियों की मध्य आयु (जो क्लब में छूट गये) = 42 वर्ष

5 व्यक्तियों की कुल आयु = 42×5 = 210

शेष 20 व्यक्तियों की कुल आयु = $950 - 210$ = 740

$\therefore$ उपस्थित व्यक्तियों की मध्य आयु $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{N} = \dfrac{740}{20} = 37$ वर्ष

उदाहरण 4: 9 निरीक्षणों का मध्यमान 45 लिया गया। गलती से एक निरीक्षण को 24 के 42 पर अंकित किया गया तो सही मध्यमान ज्ञात कीजिए।

हल: 9 निरीक्षणों का मध्यमान = 45

9 निरीक्षणों का योग = $45 \times 9 = 405$

गणना करते समय 24 के बदले 42 लिया जाय ।

$\therefore$ 9 निरीक्षणों का सही मध्यमान = $405 - 42 + 24$ = 387

9 निरीक्षणों का वास्तविक मध्यमान = $\dfrac{\sum x_i}{N} = \dfrac{387}{9} = 43$

टिप्पणी,

- उपर के उदाहरण से हम यह देखते हैं कि समानांतर माध्य का निर्धारण उनके डाटा के मूल्य पर रहता है।
- समानांतर माध्य संख्याएँ और निरीक्षणों के मूल्यों दोनों पर आधारित रहता है।
- यह अद्वितीय रूप से सभी निरीक्षणों पर आधारित है।
- जब सभी निरीक्षणों के डाटा बढ़ते हैं और घटते हैं तब माध्यामान भी बढ़ते हैं और घटते हैं उसी संख्या से।
- जब सभी निरीक्षण डाटा से गुणा या भाग किसी संख्या से करते हैं तब माध्य भी गुणा और भाग देते हैं उसी संख्या से।

7.1.2 मध्यमान विचलन पद्धति से :

दिये गये डाटा में पाँच निरीक्षण 7, 10, 15, 21, 27 हैं जब अध्यापिका मध्यमान ज्ञात करने को कहती है बिना वास्तविक हल के तीन विद्यार्थी कमल, नीलिमा और लेखा उत्तर देते हैं।

कमल अनुमान लगाता है कि इसका मूल्य17 से अधिक या कम होगा।

नीलिमा अनुमान लगाता है कि दिये गये क्रम में बीच की संख्या 15 होगी।

लेखा सभी निरीक्षणों को जोड़ कर उनकी संख्या से विभाजित करती है। तो संख्या 16 होगा।

हम इन सभी अनुमान को अनुमान माध्य या कम्पित माध्य से सूचित करेंगे। 'A'.

अब हम यह देखेंगे कि कौन-सा अनुमान वास्तविक माध्य से मिलता हो।

स्थिति 1: मान लो कमल का निर्धारित समानांतर माध्य $A = 17$

$$\text{समानांतर माध्य } \bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{7+10+15+21+27}{5} = \frac{80}{5} = 16$$

यदि प्रत्येक निरीक्षण विचलन पद्धति में A, के रूप में लिया गया हो तो

स्कोर	A	विचलन
7	17	$7 = 17 - 10$
10	17	$10 = 17 - 7$
15	17	$15 = 17 - 2$
21	17	$21 = 17 + 4$
27	17	$27 = 17 + 10$

$$\bar{x} = \frac{(17-10)+(17-7)+(17-2)+(17+4)+(17+10)}{5}$$

$$= \frac{5 \times 17}{5} + \frac{-10-7-2+4+10}{5}$$

$$= 17 + \frac{-5}{5} = 17 - 1 = 16$$

$\therefore$ समानांतर माध्य = अनुमानित मूल्य+ विचलन का औसत

स्थिति 2: नीलिमा द्वारा निर्धारित समानांतर माध्य $A = 15$

$$\text{समानांतर माध्य } \bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{7+10+15+21+27}{5}$$

$$\Rightarrow \bar{x} \text{ विचलन में } = \frac{(15-8)+(15-5)+(15-0)+(15+6)+(15+12)}{5}$$

$$= \frac{(5 \times 15)}{5} + \frac{(-8-5-0+6+12)}{5}$$

$$= 15 + \frac{5}{5} = 15 + 1 = 16$$

स्थिति 3: लेखा द्वारा अनुमानित समानांतर माध्य $A = 16$

$$\text{उनका समानांतर माध्य } \bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{7+10+15+21+27}{5}$$

$$\Rightarrow \bar{x} \text{ का विचलन मान में } = \frac{(16-9)+(16-6)+(16-1)+(16+5)+(16+11)}{5}$$

$$= \frac{(5 \times 16)}{5} + \frac{(-9-6-1+5+11)}{5}$$

$$= 16 + \frac{0}{5} = 16$$

इसे कीजिए :

ऊपर के चर्चा से यह मालूम होता है कि निर्धारित कह सकते कि माध्य वास्तविक समानांतर माध्य। यदि सभी विचलन का (औसत) सभी निरीक्षणों का सभी निर्धारण माध्य 0 होगा।

हम इस विधि से समानांतर माध्य दिये गये डाटा में मालूम कर सकते हैं।

इन स्थितियों में यह मालूम होता है कि समानांतर माध्य का निर्धारण और

समानांतर माध्य= निर्धारित मान + निरीक्षणों का औसत

$$= \text{निर्धारित माध्य} + \frac{\text{निरीक्षणों का योग}}{\text{निरीक्षणों की संख्या}}$$

$$\bar{x} = A + \frac{\sum (x_i - A)}{N}$$

उदाहरण 5: 10 निरीक्षणों का मध्यमान 14, 36, 25, 28, 35, 32, 56, 42, 50, 62 और कल्पित मूल्य 40 सूत्र से माध्य ज्ञात करो और तुम क्या बदलाव देखोगे?

हल: डाटा के 10 निरीक्षण= 14, 25, 28, 32, 35, 36, 42, 50, 56, 62

मान लो कल्पित मध्यमान $A = 40$

$$\therefore \text{ समानांतर माध्य } = A + \frac{\sum (x_i - A)}{N}$$

$$\bar{x} = 40 + \frac{(14-40)+(25-40)+(28-40)+(32-40)+(35-40)+(36-40)+(42-40)+(50-40)+(56-40)+(62-40)}{10}$$

$$= 40 + \frac{(-26)+(-15)+(-12)+(-8)+(-5)+(-4)+(2)+(10)+(16)+(22)}{10}$$

$$= 40 + \frac{(-70+50)}{10}$$

$$= 40 - \frac{20}{10}$$

$$= 40 - 2 = 38$$

$$\text{समाकरण } \bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{14+25+28+32+35+36+42+50+56+62}{10}$$

$$= \frac{380}{10} = 38$$

दोनों विधियों से हमें उत्तर एक ही प्राप्त होता है।

अर्थात समानांतर माध्य की गणना से विचलन पद्धति सुविधाजनक है, अधिक संख्याओं के, दशमलव डाटा..............

निम्न उदाहरण में

उदाहरण 6: एक हफ्ते का बाजार भाव बदलते रहता है। 3672, 3657, 3673, 3665, 3668 तो शेयर का समानांतर मूल्य ज्ञात करो।

हल: डाटा का निरीक्षण = 3657, 3665, 3668, 3672, 3673

मध्यमान= 3668

समानांतर माध्य $\bar{x} \quad = \quad A + \dfrac{\sum(x_i - A)}{N}$

$$= 3668 + \frac{(3657-3668)+(3665-3668)+(3668-3668)+(3672-3668)+(3673-3668)}{5}$$

$$= 3668 + \frac{(-11-3-0+4+5)}{5} = 3668 + \frac{(-5)}{5} = 3668 - 1 = \text{रु}.3667$$

इसे कीजिए :

1. निम्न डाटा का समानांतर माध्य मालूम करो।

   (i) 17, 25, 28, 35, 40

   (ii) 5, 6, 7, 8, 8, 10, 10, 10, 12, 12, 13, 19, 19, 19, 20

2. बिना हल किये ज्ञात कीजिए।

प्रयोगात्मक कार्य

1. 10 विद्यार्थियों के विभिन्न विषयों के अंकों को लो, प्रत्येक विषय के समानांतर माध्य बिना हल किये ज्ञात करो। तो बताओं कि वास्तविक माध्य क्या है.............
2. अपने कक्षा के विद्यार्थियों के ऊँचाई का माध्य मालूम करो और तुम्हारे खेल के अध्यापक के रिकार्ड से जाँच करो।

7.1.3 माध्यिका (Median)

माध्यिका केन्द्रिय प्रवृत्ति का दूसरा रूप है। मूल्यों के डाटा को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर इस व्यवस्था के मध्य का मूल्य माध्यिका कहलाता है।

यदि n निरीक्षण आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित किया गया।

- जब n विषम है, $\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^{th}$ निरीक्षण माध्यिका है।

- जब n सम सांख्यिक है तब श्रेणीबद्ध डाटा की माध्यिका का मान बीच के दो डाटा रहते हैं जो कि $\left(\frac{n}{2}\right)^{\text{th}}$ और $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{\text{th}}$ का मूल्य रहता है।

उदाहरण 7: 9 निरीक्षणों की माध्यिका ज्ञात करो 14, 36, 25, 28, 35, 32, 56, 42, 50.

हल: मूल्यों का आरोही क्रम = 14, 25, 28, 32, 35, 36, 42, 50, 56

n निरीक्षणों = 9 (विषम संख्या)

डाटा की माध्यिका $= \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\text{th}}$ निरीक्षण

$= 5^{\text{th}}$ निरीक्षण = 35

$\therefore$ माध्यिका = 35

उदाहरण 8: यदि दूसरा निरीक्षण 61 उन डाटा में मिलाया गया तो माध्यिका क्या होगी?

हल : आरोही क्रम = 14, 25, 28, 32, 35, 36, 42, 50, 56, 61

निरीक्षणों की संख्या $n = 10$ (सम संख्या)

तो डाटा के मध्य दो सं मूल्य रहते हैं।

डाटा की माध्यिका = समानांतर माध्य $\left(\frac{n}{2}\right)^{th}$ और $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{th}$ निरीक्षकों का

= 5 और 6 निरीक्षकों का समानांतर माध्य

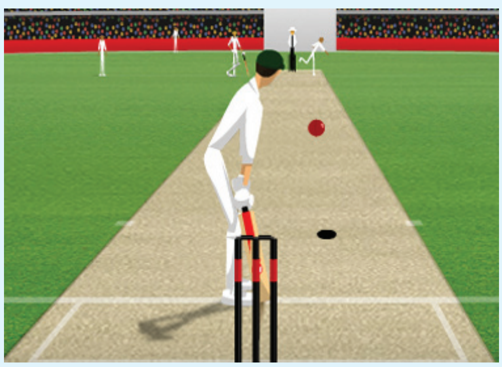
$= \frac{35+36}{2} = 35.5$

इसे कीजिए :

भारतीय क्रिकेट खिलाड़ी की ऊँचाई इस प्रकार है तो माध्यिका की ऊँचाई ज्ञात करो।

क्र. सं.	खिलाड़ी का नाम	ऊँचाई
1.	वी.वी.एस लक्ष्मण	5'11"
2.	पार्थिव पटेल	5'3"
3.	हरभजन सिंह	6'0"
4.	सचिन तेंदुलकर	5'5"
5.	गौतम गंभीर	5'7"
6.	युवराज सिंह	6'1"
7.	राबिन उथप्पा	5'9"
8.	वीरेन्द्र सहवाग	5'8"
9.	जहीर खान	6'0"
10.	एम.एस धोनी	5'11"

5' 10" का अर्थ है 5 फीट 10 इंच



टिप्पणी :

- चर राशि के मूल्यों को एक क्रम में व्यवस्थित किया जाता है।
- यह निर्भर करता है कि निरीक्षणों के और क्रमबद्ध डाटा की मान के बीच दो डाटों के यह चरम प्रवेश मूल्यों से प्रभावित नहीं होता।

इसे कीजिए

1. डाटा 24,65,85,12,45,35,15 की माध्यिका ज्ञात करो।
2. x, $2x$, $4x$ की माध्यिका 12 तो मध्यमान ज्ञात करो।
3. 24, 29, 34, 38, x की माध्यिका 29 है तो 'x' का मूल्य
   (i) $x > 38$ (ii) $x < 29$ (iii) x, 29 और 34 के मध्य (iv) कोई भी नहीं

7.1.4 बहुलक (Mode)

यदि हमको मालूम करना है कि सबसे ज्यादा पसंदीदा यूनिफार्म का रंग किसी कक्षा का या सबसे अधिक बिकने वाली शर्ट का रंग क्या है तो हम बहुलक का उपयोग करते है। एक निरीक्षण (संख्या) जिसकी बारम्बारिता सबसे अधिक है उसे दिये गये डाटा का बहुलक कहा जाता है। निम्न उदाहरण में

उदाहरण 9: एक जूते की दुकान में विभिन्न साइज के (इंच में) जूते एक हफ्ते में इस प्रकार बिके 7, 9, 10, 8, 7, 9, 7, 9, 6, 3, 5, 5, 7, 10, 7, 8, 7, 9, 6, 7, 7, 7, 10, 5, 4, 3, 5, 7, 8, 7, 9, 7 अगले हफ्ते बेचने के लिए कौन से साइज का जूता अधिक रखना होगा? कारण बताओ।

हल : यदि हम निरीक्षणों को व्यस्थित करके लिखने पर,

3, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10.

इस डाटा से यह मालूम होता है कि 7 इंच साइज का (7 नं. का) जूता ज्यादा बिका। अतः दिये गये डाटा का बहुलक 7 है। इंच का जूता ज्यादा बेचने के लिए रखा गया।

उदाहरण 10: 50 दाताओं के ब्लड ग्रुप वाले जिन्हें कैंप में भाग लेना है इस प्रकार है, A, AB, B, A, O, AB, O, O, A, AB, B, A, O, AB, O, O, A, B, A, O, AB, O, O, A, AB, B, O, AB, O, B, A, O, AB, O, O, A, AB, B, A, O, AB, O, A, AB, B, A, O, AB, O, O. उपर्युक्त प्रदत्तों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल: डाटा को देखने पर यह पता चलता है कि ग्रुप A 12 बार दुहराया गया, ग्रुप B 7 बार दुहराया गया, AB ग्रुप 12 बार तथा O ग्रुप 19 बार दुहराया गया।

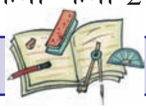
$\therefore$ दलों का बहुलक= 'O' ग्रुप

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

यदि एक या दो से ज्यादा निरीक्षण समान हैं तो वह बहुलक (जो दत्तों में है) क्या है?

टिप्पणी :

- दिये गये दत्तों में बहुलक निरीक्षण है।
- यह न संख्याओं पर आधारित है न ही निरीक्षण पर और न ही निरीक्षणों के मूल्य पर ।
- यह शब्दिक और सांख्यिकीय डाटा पर आधारित है।
- डाटा में कभी-कभी 2,3 या उससे भी ज्यादा बहुलक रहते हैं कभी एक भी बहुलक नहीं रहता।



अभ्यास - 7.1

1. एक फेयर प्राइस की दुकान में हफ्ते की बिक्री इस प्रकार है रु.10000, रु.10250, रु.10790, रु.9865, रु.15350, रु.10110 तो समानांतर माध्य ज्ञात करो।
2. दिये गये प्रदत्तों का 10.25, 9, 4.75, 8, 2.65, 12, 2.35 मध्यमान ज्ञात करो।
3. 8 निरीक्षणों का मध्यमान 25 है, यदि एक निरीक्षण 11 छूट गया तो शेष का मध्यमान ज्ञात करो।
4. 9 निरीक्षणों का मध्यमान 38 है तथा गलती से एक निरीक्षण को 72 के बदले 27 लिख दिया गया तो सही मध्यमान ज्ञात करो।
5. पाँच वर्ष पहले एक परिवार की आयु का मध्यमान 25 वर्ष है तो बताइए अब परिवार की वर्तमान मध्यमान आयु कितनी होगी?
6. दो वर्ष पूर्व 40 मनुष्यों की मध्यमान आयु 11 वर्ष थी, अब उनमें से एक मनुष्य चला गया तो बदला हुआ मध्यमान12 वर्ष है तो उस मनुष्य की आयु अब क्या होगी?

7 5, 8, 10, 15, 22 प्रदत्तों का विचलनों के योग से मालूम करो।

8. एक दल के 20 निरीक्षणों का योग 100 है तो माध्य विचलन ज्ञात करो।
9. 12 विद्यार्थियों के इकाई परीक्षा में प्राप्तांक इस प्रकार है- 4, 21, 13, 17, 5, 9, 10, 20, 19, 12, 20, 14. कल्पित मूल्य और दिये गये डाटा का मध्यमान ज्ञात करो। क्या दोनों के उत्तर एक ही हैं? मालूम कीजिए और इस पर चर्चा कीजिए।
10. (25 विद्यार्थियों में से) 10 विद्यार्थियों का मध्यमान 15 है। एक विद्यार्थी करिश्मा ने जाँच किया कि अन्य 9 विद्यार्थी में कितने अधिक या कितने कम अंक उसे मिले। अंकों में अंतर इस प्रकार है $-8, -6, -3, -1, 0, 2, 3, 4, 6$ तो करिश्मा के अंक मालूम करो।
11. 'n' निरीक्षणों के 25 विचलनों का योग 25 है और वही n विचलनों के लिए 35 का योग -25 है तो निरीक्षणों का मध्यमान ज्ञात करो।
12. 3.3, 3.5, 3.1, 3.7, 3.2, 3.8 प्रदत्तों की माध्यिका ज्ञात कीजिए।
13. आरोही क्रम में व्यवस्थित असमूहबद्ध डाटा 10, 12, 14, $x-3$, x, $x+2$, 25 की माध्यिका 15 है तो x का मूल्य ज्ञात कीजिए।

14. 10, 12, 11, 10, 15, 20, 19, 21, 11, 9, 10. का बहुलक ज्ञात करो

15. कुछ समूहबद्ध दत्तों का बहुलक x है। यदि प्रत्येक स्कोर में 3 घटता है तो नये श्रेणी का बहुलक ज्ञात करो।

16. 1 से 100 तक के प्राकृतिक संख्याओं में उपयोग होने वाले अंकों का बहुलक ज्ञात करो।

17. किसी रफ प्रदतों का निरीक्षण 5, 28, 15, 10, 15, 8, 24 हैं। उनमें ऐसे और चार निरीक्षण मिलाइए, फिर भी माध्यमान और माध्यिका समान रहे।

प्रयोगात्मक कार्य

एक महीने तक अपने विद्यालय के कमरे का तापमान मालूम कीजिए। सभी कार्य दिवसों का मध्यमान, माध्यिका और बहुलक ज्ञात कीजिए। केन्द्रीय प्रवृत्ति का मूल्य क्षेत्रफल के लिए उचित है, क्या?

7.2 दत्तों का समावेश :

पिछली कक्षाओं में हमने प्रदत्तों की गणना करके तालिका बनाना सीखा। जब डाटा ज्यादा हो तो कैसे होगा? इसे हम दो ग्रुप में बाँट लेंगे। इसे हम समूहबद्ध डाटा कहते हैं। यह उदाहरण को देखिए:

एक मकान बनाने वाली कंपनी कर्मचारियों के वेतन के आधार पर मकान बनाती है। वे 100 कर्मचारियों के मासिक आय के बारे में जानकारी प्राप्त करते हैं, जिन्हें घर चाहिए। उनकी आय 15000, 15750, 16000, 16000,16050, 16400, 16600, 16800, 17000, 17250, 17250.................. 75000.

सबसे ज्यादा 100 निरीक्षणों का योग रु.15000 से रु.75000, जबकि हम निरीक्षणों की तालिका बनाते हैं तो तालिका लम्बी, डाटा को वर्गीकृत छोटे समूह आय वाले जैसे 10001 – 20000, 20001 – 30000, . . . , 70001 – 80000.

इन छोटे समूहोंह्नको **वर्गांतर** कहते हैं। वर्गांतर 10001 – 20000 में सभी निरीक्षण 10001 और 20000 के बीच के जिनमें 10001 और 20000 दोनों रहते (या) हैं। इस प्रकार के वर्गांतर को समावेशित रूप तथा 10001 को निम्न सीमांत तथा 20000 को उच्च सीमांत कहते हैं।

7.2.1 समावेशित समूहबद्ध दलों की बारंबारिता तालिका :

उदाहरण 11: 30 विद्यार्थियों के गणित की परीक्षा में प्राप्तांक इस बारंबारिता तालिका में दिये गये हैं।

(i) कितने समूहों में डाटा का वर्गीकृत किया गया ?

क्र. सं.	प्राप्तांक	छात्रों की संख्या
1	0 – 5	5
2	5 – 10	7
3	10 – 15	10
4	15 – 20	6
5	20 – 25	2

(ii) तीसरे समूह में कितने विद्यार्थी है?

(iii) यदि किसी छात्र को 10 अंक मिले तो क्या वह दूसरी या तीसरी श्रेणी में होगा?

(iv) 6 विद्यार्थियों के अंक कौन से हैं वे 4 वें वर्गांतर में हैं?

(v) पाँचवीं समूहों के 2 विद्यार्थियों के स्वयं के अंक क्या होंगे?

उत्तर

(i) डाटा का वर्गीकरण 5 समूहों या 5 श्रेणियों में।

(ii) तीसरे समूह में 10 विद्यार्थी होंगे।

(iii) दूसरे श्रेणी की उच्च सीमा और तीसरे श्रेणी की निम्न सीमा में 10 है। इस स्थिति में उच्च सीमा वर्गांतर में नहीं है।

(iv) 4 वें वर्गांतर में विद्यार्थियों के अंक 15 और 20 से कम हैं।

(v) विद्यार्थियों के व्यक्तिगत अंकों को नहीं पहचान सकते। बारंबारिता वर्गांतर में वे 20 से 25 से कम।

इसे कीजिए :

आयु	व्यक्तियों की सं.
1 – 10	15
11 – 20	14
21 – 30	17
31 – 40	20
41 – 50	18
51 – 60	4
61 – 70	2

संलग्न बारंबारिता वितरण में एक 90 व्यक्तियों के अपार्टमेंट की आयु दी गई है।

(i) तालिका में कितने वर्गांतर हैं?

(ii) 21-30 वर्गांतर में कितने व्यक्ति हैं?

(iii) अपार्टमेंट में किस आयु के लोग ज्यादा हैं?

(iv) आखिरी तालिका (61-70) में 61, 70 या 65 दोनों समूह के लोग हैं।

7.2.2 सीमाओं की अवधि

मान लीजिए कि हमें किसी परीक्षा के लिए डाटा का निर्धारण करना है तो हम वर्गांतर इस प्रकार के लेते हैं, 1-10, 11-20 ,...... यदि एक विद्यार्थी 10.5 प्राप्त करता है तो वह किस श्रेणी में आयेगा? वर्गांतर 1-10 या 11-20. इस परिस्थिति में वास्तविक सीमा और अवधि का प्रयोग करेंगे।

दी गई तालिका में श्रेणी वर्गांतर इस प्रकार है:

वर्गांतर	
सीमाएँ	अवधि
1 – 10	0.5 - 10.5
11 – 20	10.5 – 20.5
21 – 30	20.5 – 30.5
31 – 40	30.5 – 40.5

- पहले श्रेणी की उच्च सीमा और दूसरे श्रेणी की निम्न सीमा का औसत। उच्च सीमा पहले श्रेणी की और दूसरे श्रेणी की निम्न सीमा अर्थात, 10, 11 का औसत $\frac{10+11}{2}$ = 10.5 श्रेणी की सीमा
- सभी 10.5 तक के निरीक्षण समूह 1-10 में आते हैं। लेकिन 10.5 दूसरी श्रेणी में आएगा। 11-20 श्रेणी में श्रेणी सीमांत 10.5 से 20.5 होगा।
- किसी उच्च सीमा का अनुमान लगाओ कक्षा के पहले श्रेणी से और निम्न सीमा को हल करो।

  0 का औसत 1, $\frac{0+1}{2} = 0.5$ LB
- उसी प्रकार LL का अनुमान लगाओ श्रेणी का UB की गणना करो। आखिरी वर्गांतर की 40 का औसत 41, $\frac{40+41}{2} = 40.5$ UB

  यह सीमाएँ ("true class limits") अवधि कहलाती हैं।

निम्न वर्गांतर में :

वर्गांतर कक्षांतर	सीमाएँ		अवधि	
	निम्न सीमा	उच्च सीमा	निम्न अवधि	उच्च अवधि
1-10	1	10	0.5	10.5
11-20	11	20	10.5	20.5
21-30	21	30	20.5	30.5

वर्गांतर एकमात्र कक्षा	सीमाएँ		अवधि	
	निम्न सीमा	उच्च सीमा	निम्न अवधि	उच्च अवधि
0-10	0	10	0	10
10-20	10	20	10	20
20-30	20	30	20	30

ऊपर के चित्ररूपण में या उदाहरण में हम यह देखते हैं कि डिक्रिएट सीरीज श्रेणी वर्गांतर में अवधि और सीमाएँ अलग हैं। लेकिन कुछ समानांतर श्रेणी में उच्च सीमा और निम्न सीमा का अंतर कक्षा

की लंबाई या **क्लास लेंथ** कहलाती है। उसे **‘C’** द्वारा लिखते हैं ।

इसे कीजिए:

1. 30 विद्यार्थियों के लंबी कुद का वर्गांतर

दूरी (से.मी.)	101 – 200	201 – 300	301 – 400	401 – 500	501 – 600
छात्रों की सं.	4	7	15	3	1

   I. क्या कक्षा वर्गांतर समावेशित हैं या अनन्य?
   II. दूसरे वर्गांतर में कितने छात्र हैं?
   III. कितने विद्यार्थी 3.01मी या उससे ज्यादा दूरी से कुद सकते हैं?
   IV. 4.005मी की दूरी से कौन सी वर्गांतर के छात्र कुदें?

2. श्रेणी सीमा ज्ञात करो।
3. ऊपर के प्रश्न में कक्षा की लंबाई प्रत्येक वर्गांतर में ?

7.2.3 बारंबारिता बंटन (Frequency Distribution) :

50 विद्यार्थियों के गणित में **प्रथम संग्रहणात्मक** परीक्षा के अंक 31, 14, 0, 12, 20, 23, 26, 36, 33,41, 37,25, 22, 14,3, 25, 27, 34, 38, 43, 32, 22, 28, 18, 7, 21, 20, 35, 36, 45, 9, 19, 29, 25, 33, 47, 35, 38, 25, 34, 38, 24, 39, 1, 10, 24, 27, 25, 18, 8.

इन प्रदत्तों को देखने पर आप सोच विचार कर सकते हैं कि, डाटा को कितने वर्गांतर में बाँटा गया? कैसे वर्गांतर तालिका बनाई गई?

<table>
<tr><th>वर्गांतर (अंक)</th><th>गणना चिन्ह</th><th>बारंबारिता (छात्रों की संख्या)</th></tr>
<tr><td>0 – 7</td><td>||||</td><td>4</td></tr>
<tr><td>08 – 15</td><td>卌 |</td><td>6</td></tr>
<tr><td>16 – 23</td><td>卌 ||||</td><td>9</td></tr>
<tr><td>24 – 31</td><td>卌 卌 |||</td><td>13</td></tr>
<tr><td>32 – 39</td><td>卌 卌 ||||</td><td>14</td></tr>
<tr><td>40 – 47</td><td>||||</td><td>4</td></tr>
</table>

समूहबद्ध वर्गांतर तालिका बनाने में निम्न चरण उपयोग में लाये जाते हैं :

चरण 1: प्रदत्तों की व्याप्ति मालूम करो।

व्याप्ति = अधिकतम मूल्य – न्यूनतम मूल्य

= 47 – 0 = 47

चरण 2: वर्गांतर को चुनिए साधारणत : (5 से 8) वर्गांतर

वर्गांतर की संख्या = 6

$\Rightarrow$ वर्गांतर की लंबाई = $\frac{47}{6} \simeq 8$

चरण 3: विस्तृत वर्गांतर लिखिए जो न्यूनतम मूल्य से शुरू होता है। निरीक्षण इस प्रकार है

0-7 ,8-15 .....

चरण 4: गणना अंकों का उपयोग करते हुए (प्रत्येक वर्गांतर में जो निरीक्षण आते हैं) निरीक्षण के बंटन को विभिन्न वर्गांतरों में बाँटिए।

चरण 5: गणना चिह्नों को गिनिए और तालिका में बारंबारिता लिखिए।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए :

1. निम्न श्रेणियों की बारंबारिता बंटन लिखिए 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7.
2. निम्न श्रेणियों से बारंबारिता बंटन की रचना कीजिए।

   2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 9, 11, 12, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 15, 16, 17, 18, 18, 19, 20, 20, 21, 22, 24, 24, 25. (विस्तृत वर्गांतर लीजिए)
3. इन दोनों प्रदत्तों में क्या अंतर है। (ऊपर दिये गये)
4. असंपूर्ण डाटा को किन बारंबारिताओं वर्गांतर डाटा में लिख सकते हैं?

7.2.4 समूहबद्ध बारंबारिता बंटन की विशेषता

1. यह प्रदत्तों को सुविधानुसार छोटे समूह में बाँटता है उसे बारंबारिता बंटन कहते हैं।
2. वर्गांतर 5-10, 5 में 5 निम्न सीमा और 10 उच्च सीमा कहलाती है।
3. वर्गांतर 1-10, 11-20, 21-30 .... समावेशी वर्गांतर कहलाती है, क्योंकि दोनों निम्न और उच्च सीमा कई कक्षा के वर्गांतर में रहते हैं।
4. 0-10, 10-20, 20-30 ... श्रेणी में अपवर्जी वर्गांतर कहलाता है, जिसमें केवल उस कक्षा की निम्न सीमा को ही उस वर्ग में लिया जाता है तथा उच्च सीमा को छोड़ दिया जाता है।
5. किसी कक्षा की उच्च सीमा तथा अगली कक्षा की निम्न सीमा का औसत, उस कक्षा की ऊपरी सीमा और अगली कक्षा की निम्न सीमा बनती है।
6. कुछ अपवर्जी वर्गांतर में, सीमांत और सतह दोनों समान रहते हैं, विस्तृत वर्गांतर में सीमा और सीमांत समान नहीं रहते।
7. उच्च सीमा और निम्न सीमा दोनों के अंतर को कक्षा की लंबाई कहते हैं।
8. सभी निरीक्षणों का विशेष मूल्य इस तालिका से नहीं मालूम कर सकते, लेकिन प्रत्येक निरीक्षण की श्रेणी अनुमानित औसत रहता है। इस मूल्य को प्राप्तांक या मध्य मूल्य कहते हैं।

उदाहरण:12: 30 विद्यार्थियों द्वारा सन् 2010 में एसएससी की परीक्षा में प्राप्त प्रतिशत अंक इस प्रकार हैं

45, 56, 75, 68, 35, 69, 98, 78, 89, 90, 70, 56, 59, 35, 46, 47, 13, 29, 32, 39, 93, 84, 76, 79, 40, 54, 68, 69, 60, 59. तो बांरबारिता बंटन तालिका बनाओ। इन वर्गांतर से अनुत्तीर्ण (0 – 34), तीसरी श्रेणी (35 – 49), दूसरी श्रेणी (50 – 60), पहली श्रेणी (60 – 74) और (75 – 100) प्रतिष्ठित श्रेणी।

हल : वर्गांतर पहले से ही दिया गया हो तो हम तीसरे चरण की ओर जायेंगे।

चरण 3: दिये गये वर्गांतर लिखिए।

चरण 4: यह वर्गांतर समावेशित है। उच्च सीमा भी वर्गांतर से संबंधित है। गणना चिन्हों का उपयोग करते हुए, निरीक्षणों को अलग-अलग वर्गांतर में बांट दो।

चरण 5: गणना अंक को गिन कर बांरबारिता तालिका में लिख दो ।

वर्गांतर प्राप्तांक	चिह्न	बारंबारिता (छात्रों की संख्या)
0 – 34	$\vert\vert\vert$	3
35 – 49	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}\ \vert\vert$	7
50 – 59	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}$	5
60 – 74	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}\ \vert$	6
75 – 100	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}\ \vert\vert\vert\vert$	9

7.2.5 वर्गांतर की रचना

उदाहरण 13: समूहबद्ध बारंबारिता बंटन तालिका में कक्षा के अंक (वर्गांतर का मध्य मूल्य) और बारंबारिता दिया गया हो तो वर्गांतर ज्ञात कीजिए।

मध्य मूल्य	7	15	23	31	39	47
बारंबारिता	5	11	19	21	12	6

हल: हमें मालूम है कि कक्षा अंक, वर्गांतर का मूल्य है, जो सीमांत प्रति दो कक्षा अंकों के मध्य रहता है।

चरण 1: दो क्रमागत मध्यमूल्यों का अंतर ज्ञात करेंगे $h = 15 - 7 = 8$.

(ज्ञात कीजिए कि क्या दो लगातार वर्गांतरों का अंतर समान है?)

चरण2: प्रत्येक वर्गांतर का निम्नतम और उच्चतम सीमांत ज्ञात कीजिए

यदि मध्यमूल्य अंक, 'x' हो तो, $x - h/2$ और $x + h/2$

उदाहरण के लिये पहली वर्गांतर के सीमांत $7 - \frac{8}{2} = 3$ या $7 + \frac{8}{2} = 11$

प्राप्तांक	वर्गांतर	बारंबारिता
7	(7 – 4) – (7 + 4) = 03 – 11	5
15	(15 – 4) – (15 + 4) = 11 – 19	11
23	(23 – 4) – (23 + 4) = 19 – 27	19
31	(31 – 4) – (31 + 4) = 27 – 35	21
39	(39 – 4) – (39 + 4) = 35 – 43	12
47	(47 – 4) – (47 + 4) = 43 – 51	6

7.3 संचयी बारंबारिता बंटन (Cummulative Frequency)

किसी परीक्षा में 1000 विद्यार्थियों ने भाग लिया। लिखित परीक्षा उनका समूहबद्ध बारंबारिता बंटन तालिका में दिया गया है।

वर्गांतर प्राप्तांक	(छात्रों की संख्या)
0 – 10	25
10 – 20	45
20 – 30	60
30 – 40	120
40 – 50	300
50 – 60	360
60 – 70	50
70 – 80	25
80 – 90	10
90 – 100	5

दो छात्र शरद, शंकर तालिका को देखकर इस प्रकार चर्चा करते हैं।

शरद : परीक्षा के लिए कितने छात्र हाजिर हुए ?

शंकर : 1000 छात्र हाजिर हुए।

शरद : देखो 360 छात्रों को 50-60 अंक मिले।

शंकर: यदि 60 अंक को चयन निर्धारण माना जाये तो कितने छात्र साक्षात्कार के योग्य हैं?

शरद : तुम्हारा मतलब है कि कितने छात्रों को कुल अंक 60 या उससे अधिक प्राप्त हुए।

शंकर: अर्थात 50 + 25 + 10 + 5 है, 90 छात्र योग्य है।

शरद : लेकिन 105 पद नौकरी के रिक्त पद हैं और 50 अंक कट ऑफ है।

शंकर : 360 + 50 + 25 + 10 + 5 इस स्थिति में कुल 450 उम्मीदवार योग्य हैं जिन्हें साक्षात्कार के लिए बुलाना है।

उन छात्रों की संख्या, जिन्हें समान अंक प्राप्त हों, 90 से ज्यादा अंक मिले (निम्न सीमा) = 5

उन छात्रों की संख्या, जिन्हें नवीं कक्षा के निम्न सीमा के समान या अधिक अंक प्राप्त हुए हैं

= 10 + 5 = 15

उन छात्रों की संख्या, जिन्हें आठवीं कक्षा की निम्न सीमा के समान या अधिक अंक प्राप्त हुए

= 25 + 15 = 40

उन छात्रों की संख्या, जिन्हें सातवीं कक्षा की निम्न सीमा के समान या अधिक अंक प्राप्त हुए

= 50 + 40 = 90

अनुक्रमा वर्गांतर तथा बारंबारिता को जोड़ने पर हमको ये मूल्य प्राप्त हुए। इन्हें हम संचित बारंबारिता कहते हैं। हर संचित बारंबारिता तत्संबंधित वर्ग के निचली सीमा के समान या अधिक होने के कारण यह अधिकतम संचित बारंबारिता कहलाती है।

ध्यान दीजिए कि इन अधिकतम संचित बारंबारिता को हम तालिका में कैसे लिखेंगे।

1. अंतिम वर्गांतर की बारंबारिता ही उस वर्ग के संचित बारंबारिता से अधिक है।
2. नौवीं वर्गांतर के बारंबारिता को प्राप्त करने के लिए नौवें अंतर को अधिकतम संचित बारंबारिता से जोड़ना चाहिए।
3. इसी अनुक्रम में यही पद्धति के अनुसार शेष अधिकतम संचित बारंबारिता को ज्ञात कीजिए ।

वर्गांतर (अंक)	LB	बारंबारिता (छात्रों की संख्या)	संचित बारंबारिता से अधिक
0 – 10	0	25	25+975 = 1000
10 – 20	10	45	545+930 = 975
20 – 30	20	60	60+870 = 930
30 – 40	30	120	120+750 = 870
40 – 50	40	300	300+450 = 750
50 – 60	50	360	360+ 90 = 450
60 – 70	60	50	50 + 40 = 90
70 – 80	70	25	25 + 15 = 40
80 – 90	80	10	10 + 5 = 15
90 – 100	90	5	5

दत्तों की कुल संख्या का निरीक्षण जो न्यूनतम सीमा से अधिक है, प्रत्येक वर्गांतर के लिए यह उस वर्गांतर का अधिकतम संचित बारंबारिता कहलाती है,

इसी तरह कुछ परिस्थितियों में न्यूनतम संचित बारंबारिता ज्ञात करने की आवश्यकतायें होती है।

उदाहरण के लिए अध्यापक उन छात्रों की सहायता करना चाहते हैं जिन्हें एक निश्चित अंक से कम मिले हों तो उनको चाहिए कि वह न्यूनतम संचित बारंबारिता की गणना करनी चाहिए।

एक इकाई परीक्षा में 43 छात्रों का सामूहिक बारंबारिता वितरण पर ध्यान दीजिए।

वर्गांतर (अंक)	UB	बारंबारिता (छात्रों की संख्या)	संचित बारंबारिता से कम
0 – 5	5	7	7
5 – 10	10	10	10+7 = 17
10 – 15	15	15	15+17 = 32
15 – 20	20	8	8+32 = 40

1. पहले वर्ग की बारंबारिता सीधा न्यूनतम संचित बारंबारिता में लिखी जाती है।
2. दूसरे वर्गांतर को पहले वर्गांतर के संचित बारंबारिता को जोड़िये जिससे दूसरे वर्गांतर का न्यूनतम संचित बारंबारिता प्राप्त हो।
3. इसी अनुक्रम से यही पद्धति के अनुसार शेष न्यूनतम संचित बारंबारिता ज्ञात कीजिए।

प्रत्येक वर्गांतर के लिए दत्तों की कुल संख्या का निरीक्षण जो अधिकतम सीमा से कम हो वह न्यूनतम संचित बारंबारिता कहलाती है।

इसे कीजिए:

1. न्यूनतम संचित बारंबारिता का संबंध ________________ से है।
2. अधिकतम संचित बारंबारिता का संबंध ________________ से है।
3. निम्न डाटा की न्यूनतम और अधिकतम संचित बारंबारिता लिखिये।

वर्गांतर	1 -10	11 - 20	21 - 30	31 - 40	41 - 50
बारंबारिता	4	7	12	5	2

4. कुल बारंबारिता तथा अंतिम न्यूनतम संचित बारंबारिता क्या है? आप क्या समझते हैं?

उदाहरण 14: नीचे कुछ छात्रों के अंक न्यूनतम संचित बारंबारिता के वितरण तालिका में दिये गये हैं। बारंबारिता के तत्संबंधी वर्ग लिखिए। अधिकतम संचित बारंबारिता भी ज्ञात कीजिए। तालिका में कितने छात्रों के अंक दिये गये हैं।

वर्गांतर (अंक)	1 -10	11 - 20	21 - 30	31 - 40	41 - 50
L.C.F. (छात्रों की संख्या)	12	27	54	67	75

हल:

वर्गांतर (अंक)	L.C.F.	बारंबारिता (छात्रों की संख्या)	G.C.F.
1 – 10	12	12	12 + 63 = 75
11 – 20	27	27 - 12 = 15	15 + 48 = 63
21 – 30	54	54 - 27 = 27	27 + 21 = 48
31 – 40	67	67 - 54 = 13	13 + 8 = 21
41 – 50	75	75 - 67 = 8	8

अभ्यास- 7.2

1. नीचे एक कॉलोनी के 45 लोगों की उम्र तालिका में दी गयी है।

33	8	7	25	31	26	5	50	25	48	56
33	28	22	15	62	59	16	14	19	24	35
26	9	12	46	15	42	63	32	5	22	11
42	23	52	48	62	10	24	43	51	37	48
36										

दिये गये दलों से 6 वर्गांतर से एक सामूहिक बारंबारिता वितरण का निर्माण कीजिए।

2. एक विद्यालय के 30 कक्षाओं के छात्रों की संख्या नीचे दी गई है। 4 वर्गांतर से एक बारंबारिता वितरण तालिका का निर्माण कीजिए।

25	30	24	18	21	24	32	34	22	20	22
32	40	28	30	22	26	31	34	15	38	28
20	16	15	20	24	30	25	18			

3. एक सामूहिक बारंबारिता विभाग में वर्गांतर इस तरह है 4 – 11, 12 – 19, 20 – 27, 28 – 35, 36 – 43 अगले दो वर्गांतर लिखिए। प्रत्येक वर्गांतर की लम्बाई क्या है? सभी कक्षाओं की वर्ग सीमाये भी लिखिए।

4. नीचे दी गयी सामूहिक बारंबारिता वितरण तालिका में कक्षा के अंक दिये गये है।

कक्षा अंक	10	22	34	46	58	70
बारंबारिता	6	14	20	21	9	5

(i) दिये गये दत्तों के वर्गांतर ज्ञात कीजिए (विशेष वर्गांतर)

(ii) न्यूनतम संचित बारंबारिता का निर्माण और

(iii) अधिकतम संचित बारंबारिता का निर्माण कीजिए

5. सांख्यिकी परीक्षा में एक कक्षा के 35 छात्रों द्वारा प्राप्त अंक नीचे दिये गये हैं ।(50 में से)

35	1	15	35	45	23	31	40	21	13	15
20	47	48	42	34	43	45	33	37	11	13
27	18	12	37	39	38	16	13	18	5	41
47	43									

एक समान वर्गांतर से जिसमें से एक10-20 (20 इसमें सम्मिलित नहीं है) बारंबारिता तालिका बनाइये।

6. निम्न के बारंबारिता तालिका के वर्ग सीमाएँ ज्ञात कीजिए। न्यूनतम तथा अधिकतम संचित बारंबारिता तालिकाएँ भी बनाइए।

आयु	1 - 3	4 - 6	7 - 9	10 - 12	13 - 15
छात्रों की संख्या	10	12	15	13	9

7. संचित बारंबारिता तालिका नीचे दी गई है। किस प्रकार की संचित बारंबारिता दी गई है। तत्संबंधी वर्गांतर के बारंबारिता का निर्माण कीजिए ।

दौड़	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
क्रिकेटरों की संख्या	3	8	19	25	30

8. एक पुस्तकालय में पढ़ने वालों की संख्या नीचे दी गई है। तत्संबंधी वर्गों की बारंबारिता लिखिए। न्यूनतम संचित बारंबारिता भी लिखिए।

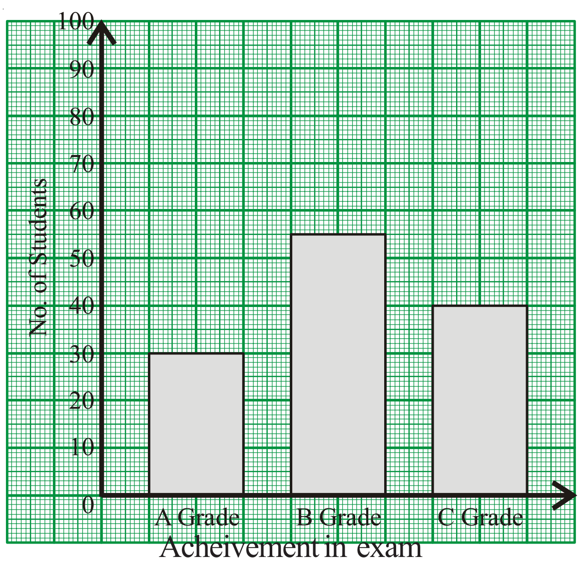
पुस्तकों की संख्या	1-10	11-20	21-30	31-40	41-50
अधिकतम संचित बारंबारिता	42	36	23	14	6

7.4 बारंबारिता वितरण का आरेखीय प्रदर्शन :

बारंबारिता वितरण एक बार ग्राफ (दंड आरेख) दत्तों का समावेश है या बारंबारिता के वर्गांतर है। हमने बारंबारिता के अखंडित श्रेणियों को चित्रालेखन, दुगुना स्तंभालेखन और वृत्तालेखन द्वारा प्रदर्शित करना सीखा है।

7.4.1 सोपान आलेख (Bar Graph)

दिये गये समाचार को तत्संबंधी मूल्यों के उपयोग से समान चौड़ाई तथा विभिन्न लंबाई के स्तंभों द्वारा प्रदर्शित करना स्तांभालेखन कहलाता है।



आइए हम देखें कि स्तंभालेखन में क्या प्रदर्शित करना है? नीचे दिये गये ऊर्ध्वाधर स्तंभालेखन का अध्ययन कीजिए।

(i) यह स्तंभालेखन क्या सूचित करता है?

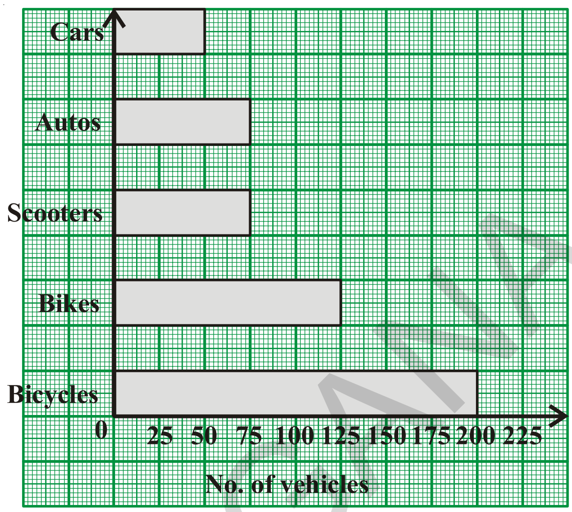
(ii) कितने छात्रों को A, B या C ग्रेड प्राप्त हुए?

(iii) अधिक छात्रों को कौन-सा ग्रेड मिला?

(iv) कक्षा में कितने छात्र हैं?

ये प्रश्नों के उत्तर आलेख देखकर बताना सरल है।

कुछ आलेखों में स्तंभ क्षैतिज रूप में भी उतारे जा सकते हैं। उदाहरण के लिए दूसरे आलेख का निरीक्षण कीजिये। इसमें नेल्लूर जिला के संगम गाँव के वाहनों के संख्याओं के डाटा दिये गये हैं।



सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

1. एक स्तंभालेख में सारे स्तंभ (आयत) में

   (a) लंबाई समान (b) चौड़ाई समान (c) क्षेत्रफल समान (d) मूल्य समान होता है।

2. क्या एक स्तंभ की लंबाई दूसरे स्तंभ की लम्बाइयों पर निर्भर है?

3. स्तंभों में मूल्यों के अंतर से क्या दूसरे स्तंभों पर प्रभाव पड़ेगा?

4. ऊर्ध्वाधर स्तंभालेख तथा दैनिक स्तंभालेक का उपयोग कहाँ होता है?

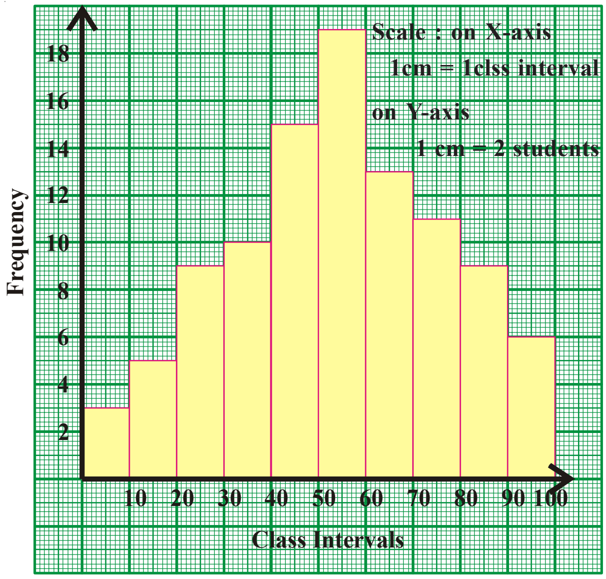
7.5 सामूहिक बारंबारिता बंटन का अलेखीय प्रदर्शन

आइए अब हम सामूहिक बारंबारिता बंटन का आलेखीय प्रस्तुतीकरण सीखेंगे, जिसमें अनन्य वर्गांतर की लगातार श्रेणियाँ हैं। इस तरह का पहला रूप सोपान आलेख है।

7.5.1 सोपान आलेख

7.5.1.1 सोपान आलेख का निर्वचन:

नीचे दिये गये समुचित बारंबारिता बंटन का निरीक्षण कीजिए।



वर्गांतर (अंक)	बारंबारिता (छात्रों की सं.)
0 – 10	3
10 – 20	5
20 – 30	9
30 – 40	10
40 – 50	15
50 – 60	19
60 – 70	13
70 – 80	11
80 – 90	9
90 -100	6

(i) एक आलेख में कितने स्तंभ होते हैं?

(ii) स्तंभ की लंबाई को किस अनुपात में उतारा गया?

(iii) सभी स्तंभों की चौड़ाई समान है। इसका क्या कारण होगा?

(iv) क्या हम दो स्तंभों को बदल सकते हैं?

आलेख से आपको यह ज्ञात हुआ होगा कि

(i) 10 वर्गांतर के 10 बारंबारिताएँ हैं।

(ii) स्तंभों की ऊँचाई, बारंबारिता के समानुपाती है।

(iii) वर्गांतर समान होने के कारण स्तंभों की चौड़ाई समान है। मुख्यतः इस उदाहरण में सभी वर्गांतर की लंबाई समय है।

(iv) यहाँ अनन्य लगातार श्रेणीयों के वर्गांतर के लगातार श्रेणियों का प्रतिरूपण होने के कारण दो स्तंभ आपस में बदले नहीं जायेंगे।

इसे कीजिए

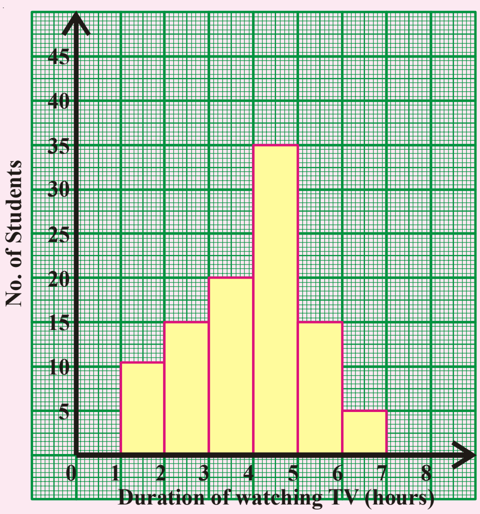
दिए गए सोपान आलेख का निरीक्षण कीजिए और निम्न प्रश्नों का उत्तर दीजिये।

(i) इस सोपान आलेख में क्या सूचनाएँ दी गई हैं?

(ii) कौन से समूह में सबसे अधिक छात्र हैं?

(iii) कितने छात्र 5 घंटे से अधिक टी.वी. देखते हैं?

(iv) कुल कितने छात्रों का सर्वेक्षण हुआ?



7.5.1.2 सोपान आलेख का निर्माण (Construction of a Histogram)

एक टीवी चैनल वाले जानना चाहते हैं कि उनका चैनल किस आयु वर्ग के लोग अधिक देखते हैं। उन्होंने एक अपार्टमेंट में सर्वेक्षण किया। प्राप्त प्रदत्तों को आयत-चित्र के रूप में प्रस्तुत किया।

वर्गांतर (आयु समूह)	बारंबारिता (दर्शकों की संख्या)	वर्गांतर
11 – 20	10	10.5 – 20.5
21 – 30	15	20.5 – 30.5
31 – 40	25	30.5 – 40.5
41 – 50	30	40.5 – 50.5
51 – 60	20	50.5 – 60.5
61 – 70	5	60.5 – 70.5
सीमाएँ		अवधि

चरण 1 : यदि दिये गये वर्गांतर समावेशी हो तो उन्हें अपवर्ती में बदलना होगा क्योंकि हम एक सोपान आलेख का निर्माण करना चाहते हैं।

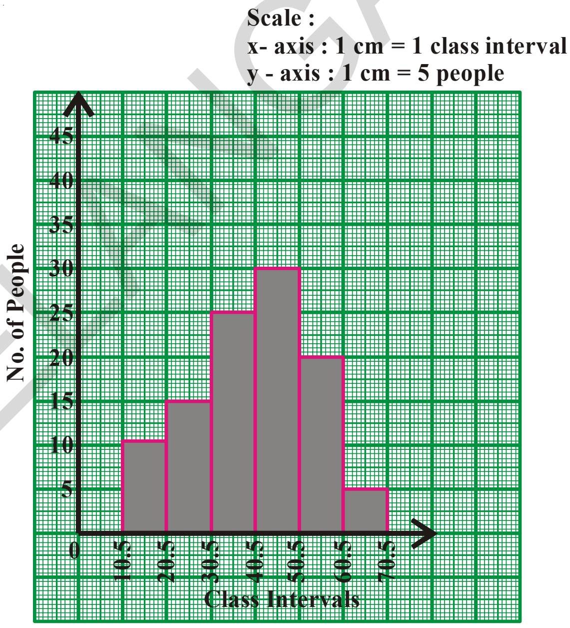
चरण 2 : x-अक्षांश के लिए माप चुनकर उस पर वर्गांतर बनाइए।

चरण 3 : y-अक्षांश के लिए माप चुनिए और इसपर बारंबारिता अंकित कीजिए। (दोनों अक्षों पर माप समान नहीं होना चाहिए।)

माप : x-अक्ष 1 सेमी = एक वर्गांतर

y-अक्ष 1 सेमी = 5 लोग

चरण 4 : आधार में वर्गांतर लेकर संगत बारंबारिताओं की ऊँचाई से आयत बनाइए।



7.5.1.3 विभिन्न वर्गांतर वाले सोपान आलेख

निम्न बारंबारिता बंटन तालिका पर ध्यान दीजिए।

वर्ग	वर्गांतर (अंक)	छात्रों का प्रतिशत
अनुत्तीर्ण	0-35	28
तृतीय श्रेणी	35-50	12
द्वितीय श्रेणी	50-60	16
प्रथम श्रेणी	60-100	44

हम इस तालिका में देखते हैं कि सभी वर्गों में अंकों की संख्या समान रूप नहीं है।

यदि हम तालिका पर ध्यान दें तो प्रथम श्रेणी में पास होने वाले छात्र 44 % हैं जिनके वर्गांतर की लंबाई 40 (60 से 100) है। यहाँ द्वितीय श्रेणी प्राप्त करने वाले छात्र 16% हैं जिनके वर्गांतर की लंबाई 10 (50 से 60) है। अतः इस तालिका को सोपान आलेख के रूप में प्रस्तुत करने के लिए वर्गांतर की चौड़ाइयों के रूप में लेना आवश्यक है।

इकाई वर्गांतर (बारंबारिता घनत्व) की गणना करते हुए संबंधित ऊँचाइयों से सोपान आलेख का निर्माण करना चाहिए। बारंबारिता घनत्व ज्ञात करने के लिए किसी भी वर्गांतर को लिया जा सकता है। अपनी सुविधानुसार न्यूनतम वर्ग लंबाई को इकाई वर्गांतर के रूप में लिया जा सकता है।

$\therefore$ किसी भी आयत की संशोधित लंबाई उसके संगत बारंबारिता घनत्व के समानुपाती होती है।

$$\text{घनत्व} = \frac{\text{वर्ग की बारंबारिता}}{\text{वर्ग की लंबाई}} \text{ x न्यूनतम वर्ग लंबाई}$$

वर्गांतर	छात्रों का प्रतिशत	वर्गांतर की लंबाई	आयत की ऊँचाई
0 – 35	28	35	$\frac{28}{35} \times 10 = 8$
35 – 50	12	15	$\frac{12}{15} \times 10 = 8$
50 – 60	16	10	$\frac{16}{10} \times 10 = 16$
60 – 100	44	40	$\frac{44}{40} \times 10 = 11$

पिछले उदाहरण के अनुसार इसकी भी संशोधित ऊँचाई से सोपान आलेख बना सकते हैं।

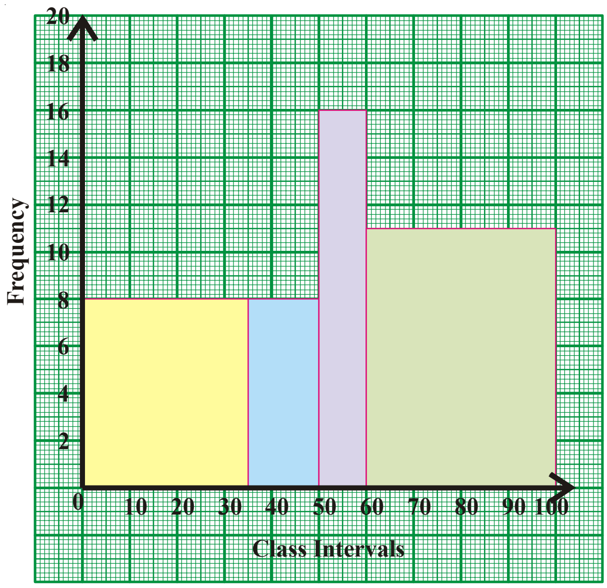
चरण 1: एक उचित पैमाने से लंबाई X-अक्ष पर वर्गांतर अंकित कीजिए।

चरण 2: उचित पैमाना लेकर बारंबारिता को Y-अक्ष पर अंकित कीजिए। (दोनों अक्षों का पैमाना समान रहना आवश्यक नहीं है।)

पैमाना: X-अक्ष 1 सेमी = 1 मिनट वर्गांतर

Y-अक्ष 1 सेमी = 2 %

चरण 3: आधार में वर्गांतर को लेकर संगत बारंबारिता की ऊँचाइयों से आयत बनाइए।



7.5.1.4 समूहबद्ध बारंबारिता बंटन का मध्य मूल्य के साथ सोपान आलेख

उदाहरण 15: कक्षा सात के 65 छात्रों द्वारा प्राप्त कुल अंकों की बंटन तालिका के लिए सोपान आलेख का निर्माण कीजिए।

प्राप्तांक (मध्य मूल्य)	150	160	170	180	190	200
छात्रों की संख्या	8	10	25	12	7	3

हल : मध्य मूल्य दिये गये हैं इसलिए वर्गांतर की गणना करनी होगी।

चरण 1: दो क्रमगत वर्गों का अंतर ज्ञात कीजिए। h = 160 -150 = 10.

(ज्ञात कीजिए क्या प्रत्येक दो क्रमगत वर्गों का अंतर समान है।)

चरण 2: प्रत्येक वर्ग के मध्य मूल्य 'x' के साथ निम्न और उच्च सीमांतर की गणना कीजिए।

$x - \frac{h}{2}$ और $x + \frac{h}{2}$.

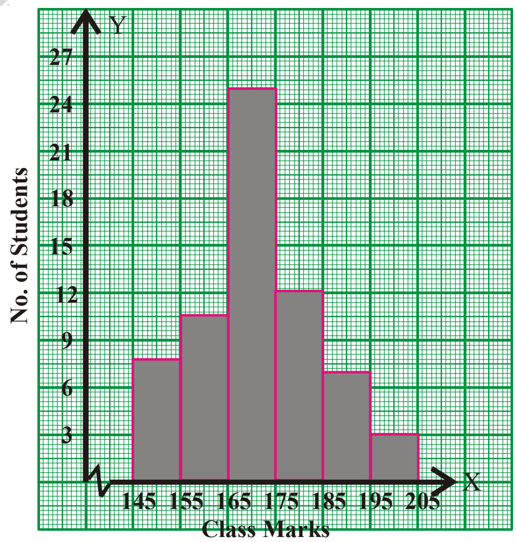
चरण 3: उचित पैमाना चयनित कीजिए।

X-अक्ष 1 सेमी = एक वर्गांतर

Y-अक्ष 1 सेमी = 4 छात्र

चरण 4: वर्गांतर को आधार मानकर और संगत बारंबारिताओं की ऊँचाई लेकर आयत बनाइए।

मध्य मूल्य (x)	वर्गांतर	छात्रों की संख्या
150	145 – 155	8
160	155 – 165	10
170	165 – 175	25
180	175 – 185	12
190	185 – 195	7
200	195 – 205	3



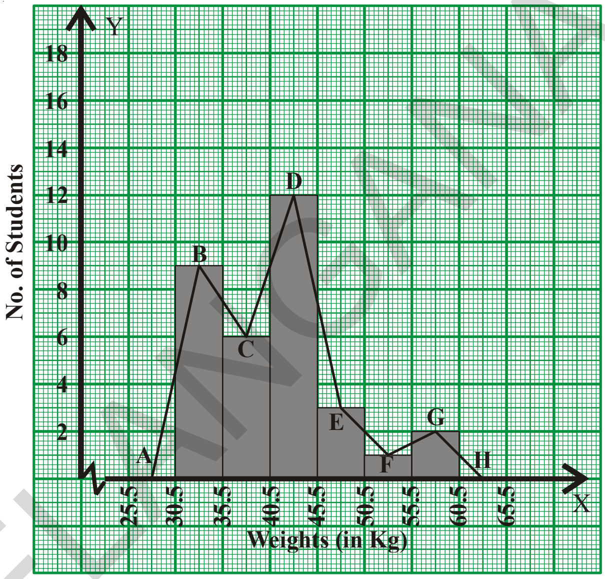
सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए।

1. 'X'-अक्ष पर श्रेणी सीमांत लिए जाते हैं। श्रेणी सीमा क्यों नहीं?
2. सोपान आलेख में प्रत्येक आयत की चौड़ाई किस मूल्य द्वारा ज्ञात होती है?
3. सभी आयतों की लंबाइयों का योग क्या दर्शाता है?

7.5.2 बारंबारिता बहुभुज

7.5.2.1 बारंबारिता बहुभुज की प्रस्तुति (Interpretation of Frequency Polygon)

दत्तों का परिमाणात्मक दत्तों का प्रतिरूपण और उनकी बारंबारिता को प्रस्तुत करने की एक दूसरी पद्धति है- 'बारंबारिता बहुभुज' आइए अब हम इस आलेख के लाभ देखें।



सोपान आलेख में एक कंपनी के 33 लोगों के भार की प्रस्तुति है। सोपान आलेख के संगत आयतों की ऊपरी भुजाओं के मध्यबिंदु को रेखाखंडों से मिलाइए। हम इन मध्य बिंदुओं को B,C,D,E,F और G मान लें। इन रेखाखंडों को जोड़ने पर हमें आकृति BCDEFG प्राप्त होगी। इस बहुभुज को पूरा करने के लिए हम मानेंगे कि 30.5-35.5 से पहले और 55.5-60.5 के बाद के वर्गांतर की बारंबारिता शून्य होगी। उनके मध्य बिंदु क्रमशः A और H हैं। ABCDEFGH बारंबारिता बहुभुज है। सामान्यत: निम्न वर्ग के पहले तथा उच्च वर्ग के बाद किसी भी वर्ग की संभावना नहीं होती है। शून्य बारंबारिता वाले दो वर्गांतरों का योग हमें बारंबारिता बहुभुज का क्षेत्रफल प्रदान करता है वही सोपान आलेख का क्षेत्रफल भी होगा। ऐसा क्यों होता है?

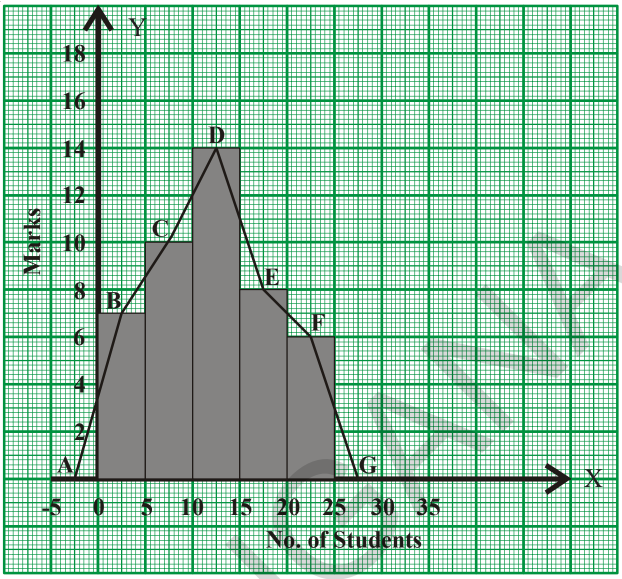
सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए।

1. प्रथम वर्ग के पहले कोई वर्ग न हो तो बारंबारिता बहुभुज कैसे पूरा करोगे?
2. दत्तांशों के सोपान आलेख का क्षेत्रफल और बारंबारिता बहुभुज का क्षेत्रफल समान है। कैसे?
3. बारंबारिता बहुभुज बनाने के लिए क्या सोपान आलेख बनाना आवश्यक है?
4. समूहबद्ध बारंबारिता बंटन के लिए क्या हम बारंबारिता बहुभुज बना सकते हैं?

7.5.2.2 बारंबारिता बहुभुज की रचना (Construction of a Frequency Polygon)

एक कक्षा में 45 छात्रों के प्राप्तांकों (25 में से) पर ध्यान दीजिए। बारंबारिता बंटन तालिका से बारंबारिता बहुभुज बनाइए।

वर्गांतर (प्राप्तांक)	बारंबारिता (छात्रों की संख्या)	मध्य मूल्य
0-5	7	2.5
5-10	10	7.5
10-15	14	12.5
15-20	8	17.5
20-25	6	22.5
कुल	45	



रचना के सोपान

चरण 1: दिये गये दत्तों के मध्यमूल्य ज्ञात कीजिए।

चरण 2: दिये गये दत्तों के सोपान आलेख बनाइए। उनके मध्य बिंदुओं को आयत के ऊपरी सिरों पर अंकित कीजिए। (उदाहरणतः क्रमशः B, C, D, E, F हैं।)

चरण 3: क्रमगत मध्य बिंदुओं को जोड़िए।

चरण 4: प्रथम वर्ग के पहले तथा अंतिम वर्ग के बाद के वर्गांतर का अनुमानित मूल्य लीजिए और उनका मध्य मूल्य ज्ञात कीजिए। (A और H) इसे अक्ष पर अंकित कीजिए। (यहाँ पर पहली श्रेणी 0 – 5 है। इसलिए 0 - 5 श्रेणी की पिछली श्रेणी को ज्ञात करने के लिए क्षितिज रेखा को ऋणात्मक दिशा में बढ़ाकर इसे अनुमानित वर्गांतर का मध्यमूल्य -5, 0 ज्ञात कीजिए)

चरण 5: पहले अंतिम बिंदु B से A को मिलाया गया और अंतिम बिंदु F से G को मिलाकर बारंबारिता बहुभुज को पूर्ण किया गया है।

बारंबारिता बहुभुज को बिना सोपान आलेख खींचे, स्वतंत्र रूप से भी उतारा जा सकता है। इसके लिए हमें कक्षा वर्गांतर के मध्यबिंदुओं की आवश्यकता होती है।

इसे कीजिए।

1. दी गई बारंबारिता बंटन तालिका से बारंबारिता बहुभुज की रचना कीजिए।

(i) एक कक्षा के क्रिकेट मैच में बनाये गये रनों की तालिका इस प्रकार है-

बनाये गये रन	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
छात्रों की संख्या	3	5	8	4	2

(ii) एक नाटक के बेचे हुए टिकट

टिकट का मूल्य	10	15	20	25	30
टिकटों की संख्या	50	30	60	30	20

7.5.2.3 बारंबारिता बहुभुज के लक्षण (Characteristics of a Frequency Polygon):

1. बारंबारिता बंटन का आलेखीय रूप ही बारंबारिता बहुभुज है।
2. अनुक्रम के मध्य मूल्य या प्राप्तांकों को X-अक्ष पर और संलग्न बारंबारिता को Y-अक्ष पर अंकित किया जाता है।
3. समान दत्तांशों वाले बारंबारिता बहुभुज का क्षेत्रफल और सोपान आलेख का क्षेत्रफल समान होता है।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए।

1. सोपान आलेख दिये गये वर्गांतर की बारंबारिता को दर्शाता है? क्या वह एक निश्चित मूल्य की बारंबारिता को दर्शा सकता है?
2. क्या बारंबारिता बहुभुज दिए गए दत्तों के निश्चित मूल्य की बारंबारिता को बता सकता है?

7.5.2.4 समूहबद्ध बारंबारिता बंटन तालिका के लिए सोपान आलेख के बिना बारंबारिता बहुभुज बनाना

मधुमेह रोगियों के अध्ययन की जानकारी इस तालिका में दी गई है।

आयु	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
रोगियों की संख्या	5	9	16	11	3

आइए अब हम बारंबारिता बहुभुज की रचना बिना सोपान आलेख के करें।

चरण 1: विभिन्न श्रेणियों के प्राप्तांक ज्ञात कीजिए।

चरण 2: पैमाने का चयन कीजिए: X-अक्ष 1 सेमी = 1 वर्गांतर

Y-अक्ष 1 सेमी = 2 अंक

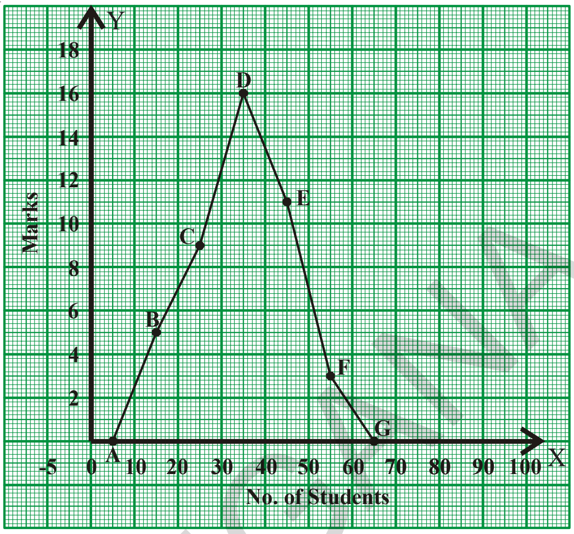
चरण 3: यदि 'x' को प्राप्तांक से तथा संलग्न बारंबारिता को 'f' से सूचित करते हैं तो ('x', f) के लिए आलेख का निर्माण कीजिए।

चरण 4 : रेखांखडों द्वारा बिंदुओं को मिलाइए।

चरण 5 : इसी प्रकार और दो श्रेणियों की कल्पना कीजिए। प्रथम श्रेणी के पहले और अंतिम श्रेणी के बाद प्रत्येक में बारंबारिता शून्य होगी। आलेख में उनके मध्य बिंदुओं को अंकित कीजिए।

चरण 6 : बहुभुज पूर्ण कीजिए।

वर्गांतर (आयु)	रोगियों की संख्या	मध्य मूल्य	क्रमित युग्म
0 – 10	0	5	(5, 0)
10 – 20	5	15	(15, 5)
20 – 30	9	25	(25, 9)
30 – 40	16	35	(35, 16)
40 – 50	11	45	(45, 11)
50 – 60	3	55	(55, 3)
60 – 70	0	65	(65, 0)



7.5.3 समूहबद्ध बारंबारिता बंटन के लिए बारंबारिता वक्र

यहाँ दत्तों को सरलीकृत वक्रों द्वारा प्रदर्शित करने की एक अन्य विधि है।

आइए दिए गये दत्तों के बिना सोपान आलेख वाले बारंबारिता वक्र की रचना करें।

चरण 1: विभिन्न वर्गांतरों के मध्य मूल्य ज्ञात कीजिए।

चरण 2: पैमाना निर्धारित कीजिए।

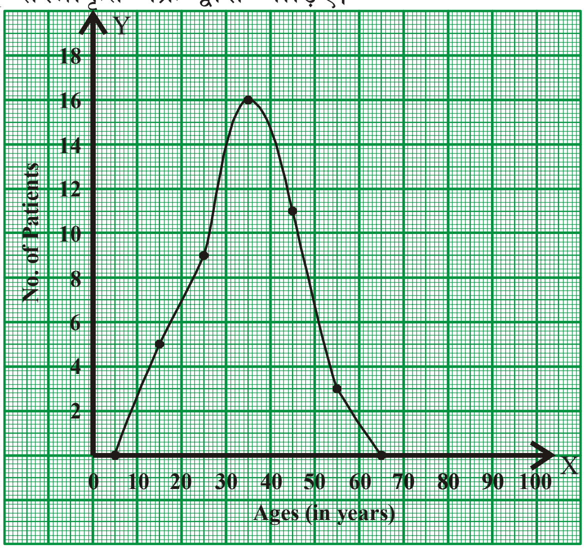
X-अक्ष 1 सेमी = 1 वर्गांतर

Y-अक्ष 1 सेमी = 2 अंक

चरण 3: किसी कक्षा के प्राप्तांकों के लिए 'x' मध्य मूल्य और 'f' संगत बारंबारिता हो तो क्रमित युग्म (x, f) आलेख पर अंकित कीजिए।

चरण 4: क्रमागत आनेवाले बिंदुओं को क्रमशः सरलीकृत वक्र द्वारा जोड़िए।

वर्गांतर (आयु)	रोगियों की संख्या	मध्य मूल्य	क्रमित युग्म
0 – 10	0	5	(5, 0)
10 – 20	5	15	(15, 5)
20 – 30	9	25	(25, 9)
30 – 40	16	35	(35,16)
40 – 50	11	45	(45,11)
50 – 60	3	55	(55, 3)
60 – 70	0	65	(65, 0)



7.5.4 संचयी बारंबारिता (cumulative frequencies) बंटन का आलेख

किसी समूहबद्ध बारंबारिता बंटन की संचयी बारंबारिता और क्रमशः वर्गांतरों के संगत निम्न/उच्च सीमा के आलेख को संचयी बारंबारिता वक्र या चाप विकर्ण वक्र कहते हैं।

ये वक्र एक सतत श्रेणी के प्रत्येक स्तर में एकत्रित शेष निरीक्षणों को समझने में सहायक होते हैं।

7.5.4.1 अवरोही संचयी बारंबारिता वक्र (Less than Cummulative frequency curve)

समयानुसार सरकारी कार्यों के लिए ठेकेदारों को प्राप्त कुछ टेंडरों की संख्या समूहबद्ध बारंबारिता तालिका देखिए।

वर्गांतर (दिन)	0 – 4	4 - 8	8 - 12	12 – 16	16 – 20
टेंडरों की संख्या	2	5	12	10	3

चरण 1: यदि दिया गया बारंबारिता बंटन समावेशी रूप में हो तो उसे सतत् रूप में परिवर्तित कीजिए।

चरण 2: आवरोही संचयी बारंबारिता तालिका बनाइए।

चरण 3: X-अक्ष पर वर्गांतरों के उच्च सीमांत औ Y-अक्ष पर उनके संगत संचित बारंबारिता अंकित कीजिए।

पैमाना निर्धारित कीजिए :

X-अक्ष 1 सेमी = 1 वर्गांतर

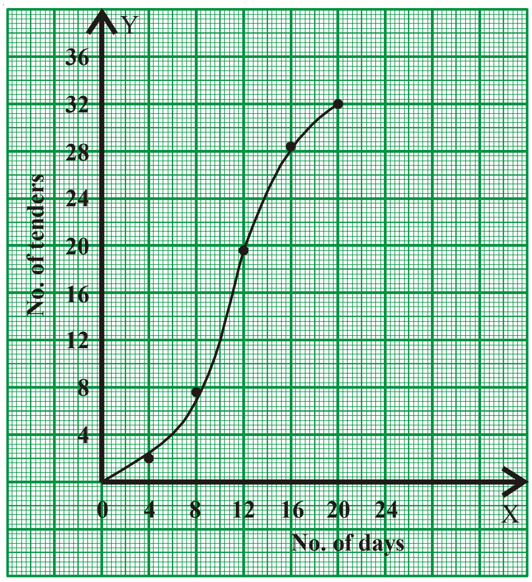
Y-अक्ष 1 सेमी = 4 टेंडर

वर्गांतर (आयु)	टेंडरों की संख्या	उच्च सीमांत	निम्न संचयी बारंबारिता
0 – 4	2	4	2
4 – 8	5	8	7
8 – 12	12	12	19
12 – 16	10	16	29
16 – 20	3	20	32

चरण 4: पहले वर्गांतर के निम्न सीमांत (पहली श्रेणी से पूर्व की श्रेणी के उच्च सीमांत) की संचयी बारंबारिता 0 अंकित कीजिए।

चरण 5: इस बिंदुओं को सरलीकृत वक्र द्वारा जोड़कर चाप विकर्ण वक्र प्राप्त कीजिए।

इसी प्रकार हम 'आरोही' संचित बारंबारिता वक्र की रचना भी करसकते हैं। इसमें Y-अक्ष पर आरोही संचित बारंबारिताएँ और X-अक्ष पर संगत 'निम्न सीमांत' लिया जाता है।



अभ्यास - 7.3

1. बुद्धि लब्धि के विभिन्न स्तरों के लिए 45 विद्यार्थियों का वितरण निम्न तालिका में दिया गया है। दत्तों सोपान आलेख खींचिए।

बुद्धि लब्धि	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120	120-130
छात्रों की संख्या	2	5	6	10	9	8	5

2. कक्षा सात की वार्षिक परीक्षा में 600 छात्रों द्वारा प्राप्तांकों के लिए सोपान आलेख बनाइए।

प्राप्तांक	360	400	440	480	520	560
छात्रों की संख्या	100	125	140	95	80	60

3. एक फैक्टरी के 250 मज़दूरों का साप्ताहिक वेतन निम्न तालिका में दिया गया है। दिये गये दत्त कार्यों के लिए एक ही आलेख पर सोपान आलेख और बारंबारिता बहुभुज बनाइए।

साप्ताहिक वेतन	500-550	550-600	600-650	650-700	700-750	750-800
मज़दूरों की संख्या	30	42	50	55	45	28

4. एक मंडल के प्राथमिक विद्यालयों के 60 अध्यापकों की आयु निम्न बारंबारिता तालिका में दी गई है। बारंबारिता बहुभुज और बारंबारिता वक्र निम्न दत्त के लिए बिना सोपान आलेख के बनाइए। (भिन्न-भिन्न आलेख के कागज उपयोग कीजिए।)

आयु	24 – 28	28 – 32	32 – 36	36 – 40	40 – 44	44 – 48
अध्यापकों की संख्या	12	10	15	9	8	6

5. निम्न बारंबारिता बंटन तालिका के लिए वर्गांतर एवं बारंबारिता की रचना कीजिए। साथ ही साथ चाप विकर्ण वक्र भी बनाइए।

प्राप्तांक	5 से कम	10 से कम	15 से कम	20 से कम	25 से कम
छात्रों की संख्या	2	8	18	27	35

हमने क्या सीखा ?

1. **अममुहबद्ध दत्तों का समानान्तर माध्यम** $= \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n}{n}$ या $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{\text{N}}$ (संक्षिप्त रूप) जहाँ $\sum x_i$ सभी x_i का योग है जहाँ 'i' का मान 1 से n तक है।

2. **समानान्तर माध्यम** = कल्पित मध्यमान + विचलन का औसत

   या $\bar{x} = \text{A} + \dfrac{\sum (x_i - \text{A})}{\text{N}}$

3. मध्यमान के उपयोग से सांख्यिक दत्तों का विश्लेषण किया जा सकता है।

4. **दत्तों के निरिक्षण को क्रमबद्ध** आरोही या अवरोही क्रम में **व्यवस्थित करने के बाद बीच वाले परीक्षण को माध्यिका कहते हैं ।**

5. माध्यिका के उपयोग से सांख्यिक दत्तों का किया जा सकता है, जब बहुत भिन्नता वाले कम निरीक्षण हो तो कम यह अत्यधिक उपयोगी है।

6. **बहुलक का उपयोग शाब्दिक और सांख्यिकी विश्लेषण के लिये किया जाता हैं ।**

7. **बहुलक एक ऐसी संख्या है जो दिये गये दत्तों में कई बार दोहराई जाती हैं ।**

8. दत्तों के भिन्न-भिन्न निरीक्षणों का उनकी बारंबारिता के साथ प्रदर्शन को बारंबारिता बंटन या बंटन तालिका कहते हैं।

9. किसी श्रेणी की उच्च सीमा और निम्न सीमा में अंतर को श्रेणी की लंबाई कहते हैं। इसे 'C' द्वारा दर्शाते हैं।

10. दिये गये दत्तों के लिए किसी विशेष वर्गांतर की निम्न सीमा के बराबर या उससे अधिक निरीक्षणों की कुल संख्या को अवरोही संचित बारंबारिता कहते हैं।

11. दिये गये दत्तों के लिए किसी विशेष वर्गांतर की निम्न सीमा के बराबर या उससे कम निरीक्षणों की कुल संख्या को आरोही संचित बारंबारिता कहते हैं।

12. समूहबद्ध बारंबारिता बंटन में यदि वर्गांतर भिन्न है तो सोपान आलेख में बारंबारिता घनत्व के आधार पर आयतों की रचना करनी होगी।

    $$\text{बारंबारिता घनत्व} = \frac{\text{श्रेणी की बारंबारिता}}{\text{श्रेणी की लंबाई}} \times \text{दत्तों में न्यूनतम श्रेणी की}$$

13. बारंबारिता बंटन तालिका को बारंबारिता बहुभुज आलेख के रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है। (भिन्न/क्रमगत)

14. बारंबारिता बहुभुज या बारंबारिता वक्र में, किसी कक्षा के प्राप्तांकों या उनके मध्यमान को X-अक्ष तथा Y-अक्ष पर संलग्न बारंबारिता के रूप में प्रस्तुत कर सकते हैं।

15. समान दत्तों का बारंबारिता बहुभुज और सोपान आलेख का क्षेत्रफल समान होता है।

16. **सोपान आलेख बारंबारिता बंदन का आलेखीय प्रस्तुतीकरण है जिसमें लगातार श्रेणियाँ है ।**

17. **किसी समूहबद्ध बारंबारिता बंटन की संचयी बारंबारिता और क्रमशः वर्गांतरों के संगत निम्न/उच्च सीमा के आलेख को संचयी बारंबारिता वक्र या चाप विकर्ण कहते हैं ।**

तार्किक ढंग से सोचिए।

कुछ आलेखों और चार्टों की सहायता से किसी भी विषय से संबंधित प्रदत्तों को एक आकार के रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है। इस आकृति को ध्यान से देखिए और प्रत्येक प्रश्न का उत्तर दीजिए और उन्हें पुनः जाँच कीजिए।

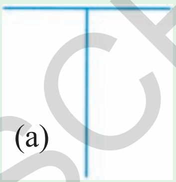
(a) क्षितिजीय या ऊर्ध्वाधर में कौन सा लंबा है?

(b) क्या l और m रेखाएँ सीधी और समांतर हैं?

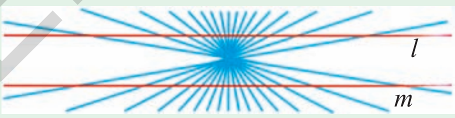
(c) किसकी लंबाई अधिक है? : $\overline{AB}$ या $\overline{BC}$

(d) बहुभुज की कितनी भुजाएँ होती हैं? क्या यह एक वर्ग होता है?

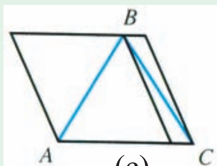
(e) नीचे दी गई आकृतियों के बारे में बताइए।



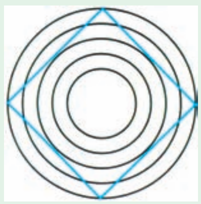
(a)



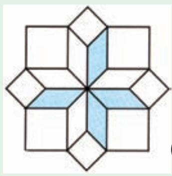
(b)



(c)



(d)



(e)

अध्याय **8**

ज्यामितीय आकारों का अन्वेषण
(EXPLORING GEOMETRICAL FIGURES)

8.0 परिचय

दैनिक जीवन में विविध ज्यामितीय आकार हमारे सामने आते ही रहते हैं। हमारे जीवन की वस्तुएँ एवं क्रियाएँ प्रत्यक्ष या अप्रत्यक्ष रूप से ज्यामितीय से संबंध रखती हैं। इन वस्तुओं एवं क्रियाओं में ज्यामितीय के लक्षण व संक्रियाएँ देखी जा सकती हैं।

निम्नलिखित आकृतियों को देखिए, क्या इनमें ज्यामितीय आकार और पैटर्न समाहित हैं। आपने इस प्रकार के अन्य आकार प्रकृति में देखे ही होंगे, इनमें कुछ समरूप होते हैं और कुछ में अन्य ज्यामितीय लक्षण होते हैं। यदि हम ध्यान दें तो देखेंगे कि हमारे फर्श अनेक ज्यामितीय आकार बिखरे पड़े हैं।

क्या आप इन चित्रों में कुछ समरूप आकार, अनुरूप आकार और सममित पैटर्न ढूँढ़ सकते हैं?

लिखेंग ₹

चित्र.8.1 (a)

चित्र. 8.1(b)

इस चित्र में खिड़कियों के आकार में सर्वसमानता; त्रिकोणीय डिजाइनों में समरूपता और टाइल पैटर्न में सममितता देखी जा सकती है।

आइए, पढ़ें कि ज्यािमतीय आकार और इनके सिद्धांत हमारे दैनिक जीवन को किस प्रकार प्रभावित करते हैं।

8.1 सर्वसमानता (Congruency)

आपने अपने दैनिक जीवन में अनेक समान आकार एवं माप वाली वस्तुओं को देखा ही होळगा। उदाहरणात: पंखों के समान साकार व समान माप के ब्लेडों को।

चित्र. 8.2

दैनिक जीवन में समरूपता का अक अन्य उदाहरण देखिए।

किसी आडियो की दुकान में जाइए और वहाँ की सीडियों पर ध्यान दीजिए।

सभी सीडियाँ समान रूप और समान आकार की हैं। यदि तुम उन्हें एक के ऊपर एक रखो तो वे एक दूसरे को पूरी तरह ढंक लेंगी।

अब कुछ पोस्टकार्डों को एक के ऊपर एक रखिए। आप देखेंगे कि सभी पोस्टकार्ट समान रूप एवं आकार के हैं; वे सभी एक दूसरे से सर्वांगसम/सर्वसमान हैं।

आप भी इस प्रकार के अनेक सर्वांगसम वस्तुएँ खोज सकते हैं।

8.1.1 आकारों की सर्वसमानता (Congruency of shapes)

निम्न पर ध्यान दीजिए।

(i)

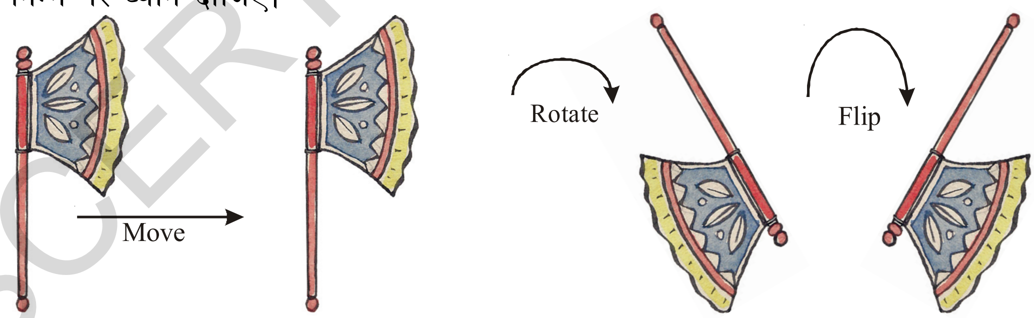


Fig. 8.3

उपर्युक्त चित्र में, क्या सभी एक ही आकृति को घुमा-फिरा कर बताया गया है?

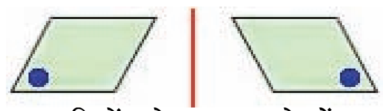
यहाँ एक ही आकृति को घुमाया, फिराया और झुकाया गया है। वे एक ही हाथ के पंखे के चित्र हैं।

यदि हम सभी आकारों को एक के ऊपर एक रखें तो क्या पाएँगे?

ये सभी एक-दूसरे को पूरी तरह से समान रूप से ढँक लेंगी। अत: इनका आकार एवं माप समान है।

क्या आपको याद है कि हम समान आकार एवं माप वाली आकृतियों को क्या कहते हैं?

समान आकार एवं समान माप वाली आकृतियाँ, सर्वांगसम आकृतियाँ कहलाती हैं।

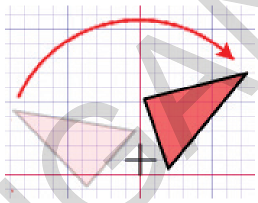


क्या आपको याद है कि समान आकार एवं समान माप वाली आकृतियों को क्या कहते हैं?

समान आकार एवं समान माप वाली आकृतियों को सर्वसमान/सर्वांगसम कहते हैं।

फ्लिप (पलटना) : जब किसी समतल आकृति को पलटना फ्लिप (पलटना) कहलाता है, जैसा चित्र में दिखाया गया है।

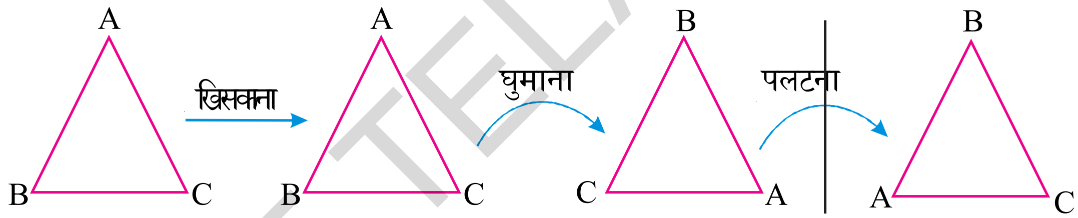
घुमाव **(Rotation) :** केंद्र के आधार पर किसी आकृति को घुमाना 'घुमाव' कहलाता है। केंद्र से आकृति के किसी भी बिंदु तक की दूरी घुमाव के बाद भी समान होती है। प्रत्येक बिंदु पर वृत्त के केंद्र से वृत्त बना सकते हैं।



इसमें केवल केंद्र स्थिर रहता है और सभी बिंदु वृत्ताकार रूप में घूमते रहते हैं। एक बार का 'पूर्ण घुमाव' 360° के समान होता है।

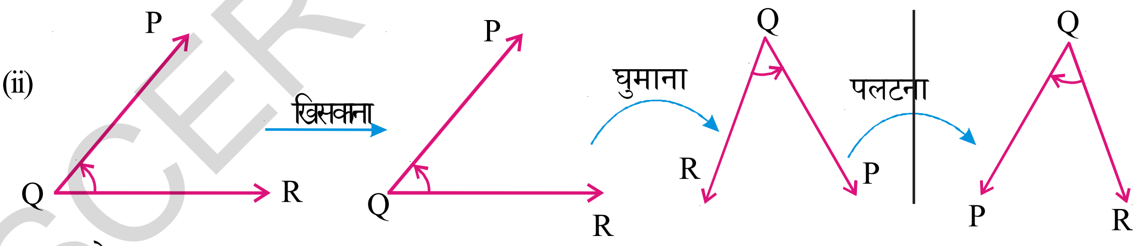
इन ज्यामितीय आकृतियों पर ध्यान दीजिए।

(i)



त्रिभुज

(ii)



कोण

इन सभी पंक्तियों में आकृतियों को क्रमशः बढ़ाया, घुमाया और पलटाया गया है। इन आकृतियों में आये परिवर्तन ज्ञात कीजिए।

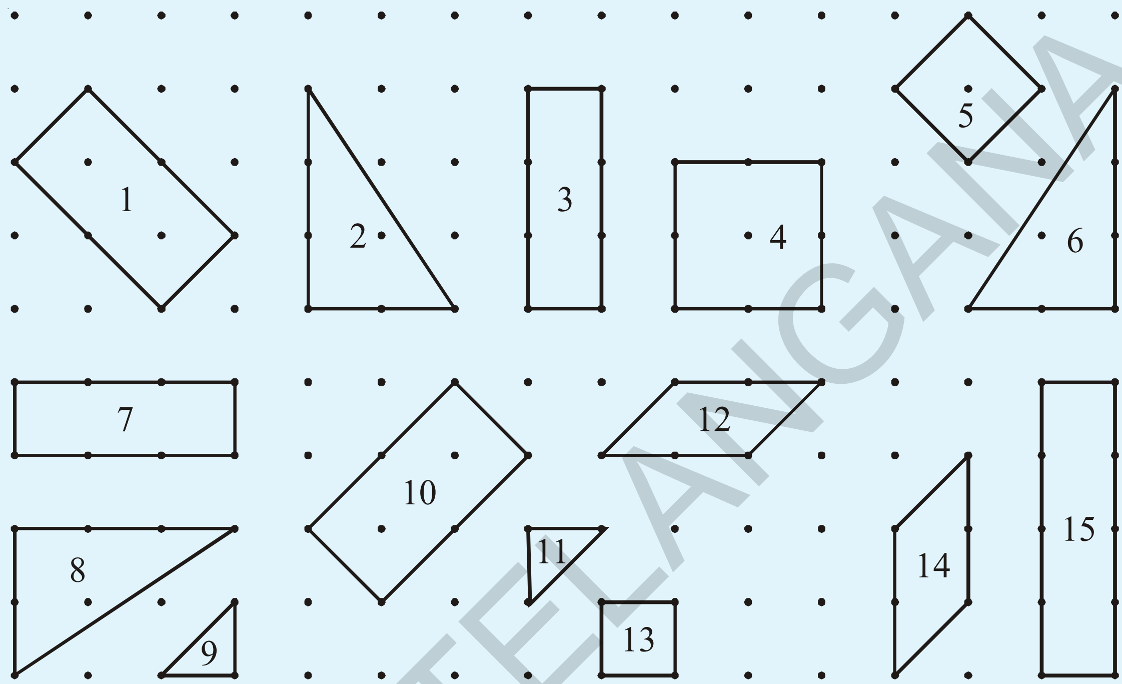
नहीं, ये सभी आकृतियाँ समान हैं केवल उनकी स्थिति में परिवर्तन है।

यदि दो आकृतियाँ सर्वसमान हैं, तो उन्हें खिसकाने, घुमाने और पलटाने से भी वह सर्वसमान ही रहेगा।

सर्वसमानता के लिए $\cong$ चिह्न का प्रयोग करते हैं।

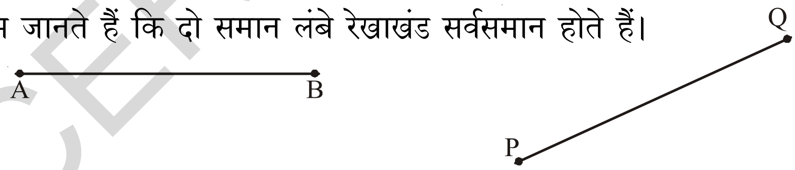
इसे कीजिए।

निम्नलिखित आकृतियों में सर्वसमान आकृतियों को पहचानिए।



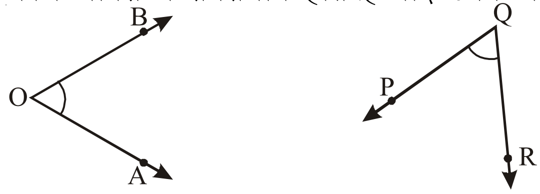
क्या आप बता सकते हैं कि दोनों आकृतियों में कौन से (a) रेखा खंड (b) कोण और (c) त्रिभुज सर्वसमान हैं ?

(a) हम जानते हैं कि दो समान लंबे रेखाखंड सर्वसमान होते हैं।



AB की लंबाई = PQ की लंबाई तो $AB \cong PQ$

(b) दो कोण आपस में सर्वसमान होते हैं यदि उनके माप समान हों।



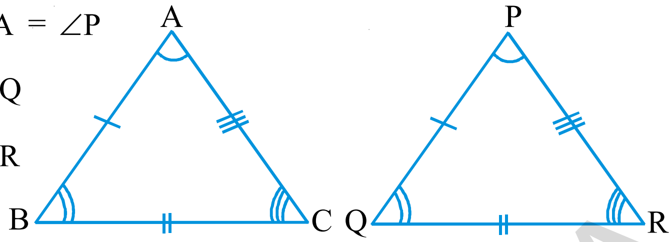
(c) यदि दो त्रिभुजों ΔABC और ΔPQR की संलग्न भुजाएँ व कोण समान हों तो वे सर्वसमान होती हैं।

अर्थात्, $AB = PQ$ और $\angle A = \angle P$

$BC = QR$ $\angle B = \angle Q$

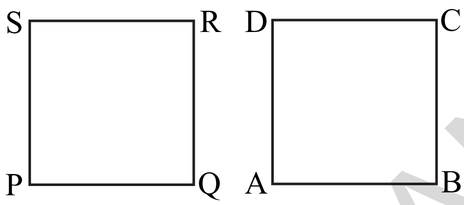
$CA = RP$ $\angle C = \angle R$

$\Delta ABC \cong \Delta PQR$.



अब आप किस प्रकार कह सकते हैं कि दो बहुभुज सर्वसमान होते हैं?

आइए इसका एक उदाहरण लेकर चर्चा करें। मान लीजिए कि दो वर्ग ABCD और PQRS हैं। एक-दूसरे के ऊपर रखने से यदि वे एक दूसरे को पूरी तरह ढँक लेते हैं तो वे सर्वसमान होंगे।



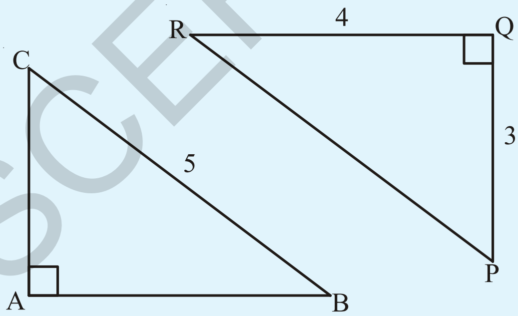
अर्थात, जब दो वर्गों की भुजाएँ एक दूसरे को पूरी तरह ढँक लें तो इन्हें सर्वसमान वर्ग कहते हैं।

यदि दो बहुभुज सर्वसमान हों तो उनकी संलग्न भुजाएँ और कोण समान होते हैं।

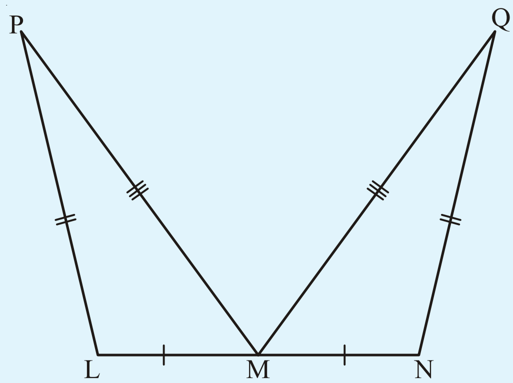
इसे कीजिए।

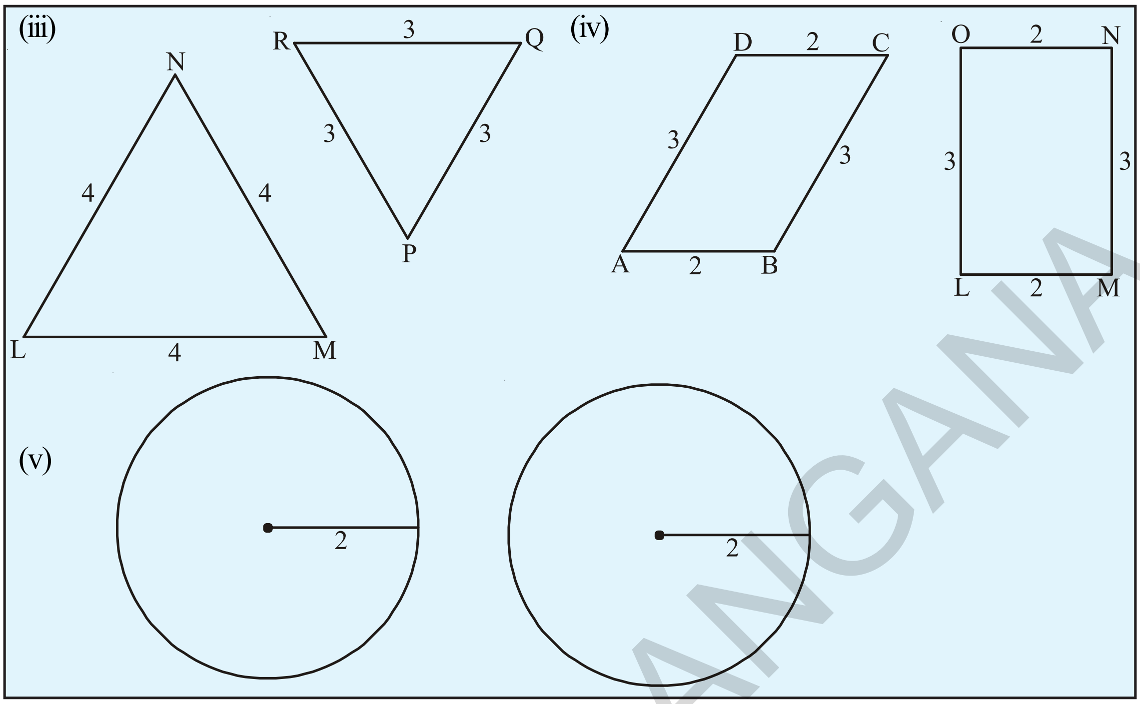
निम्न चित्रों के जोड़ों को देखिए और बताइए कि वे सर्वसमान हैं या नहीं। कारण बताइए। उनका नामांकन कीजिए।

(i)



(ii)





8.1.2 समरूप आकृतियाँ

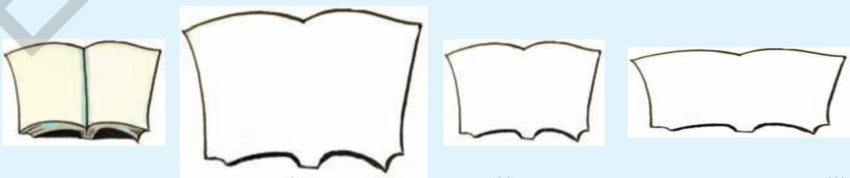
हमारी पुस्तकों में आसपास की अनेक चित्र हैं। उदाहरण के लिए, हाथी, बाघ, भवन निर्माण की रूपरेखा, माइक्रोचिप की संरचना आदि।

क्या इन्हें उनके समान माप में बनाया गया है? नहीं, यह असंभव है। इनमें से कुछ अपने वास्तविक माप से कम हैं तो कुछ अधिक।

इसे कीजिए।

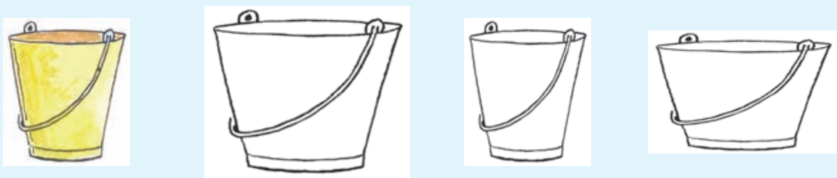
1. पहली आकृती में समरूप आकृतियाँ पहचानिए।

(a)



(i) (ii) (iii)

(b)

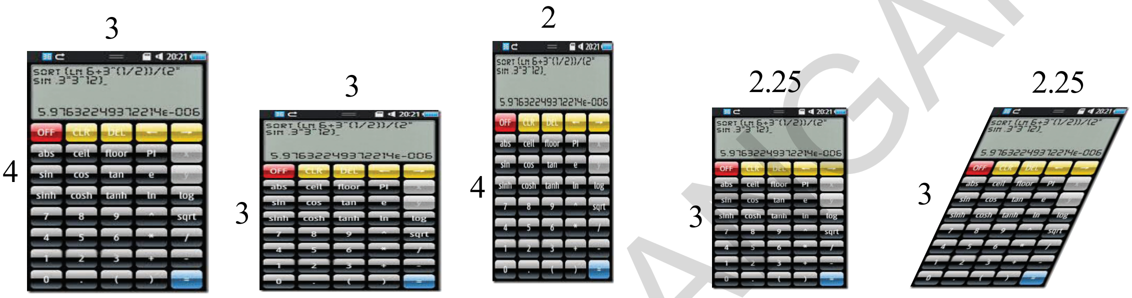


(i) (ii) (iii)

एक कागज पर पेड़ का चित्र बना है।हम कैसे कह सकते हैं कि ये चित्र एक दूसरे के समरूप हैं?

वास्तविक बनाया गया

यहाँ एक वस्तु विविध स्थितियों में दर्शाई गई है। कौनसी वास्तविक आकृति का छोटा समरूप है।



वास्तविक वस्तु लघुकरण-1 लघुकरण-2 लघुकरण-3 लघुकरण-4

इन सभी को देखकर हम कह सकते हैं कि लघुकरण-3 वास्तविक आकृति का समरूप है। क्यों?

अब वास्तविक वस्तु और लघुकरण-3 की संगत तत्वों का अनुपात ज्ञात कीजिए। आपने क्या देखा?

$$\frac{\text{वास्तविक वस्तु की लंबाई}}{\text{लघुकरण-3 की लंबाई}} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\text{वास्तविक वस्तु की चौड़ाई}}{\text{लघुकरण-3 की चौड़ाई}} = \frac{3}{2.25} = \frac{3\times 4}{2.25\times 4} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

यहाँ सभी संलग्न कोण समकोण और समान हैं।

अत: हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं- "दो बहुभुज समरूप होते हैं यदि उनके संलग्न कोण और सर्वसमान हों और संगत भुजाओं की लंबाई समानुपाती हो।"

सभी अन्य लघुकरणों की संगत भुजाओं के अनुपात ज्ञात कीजिए।

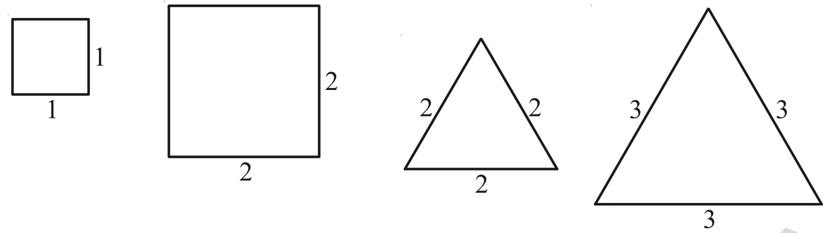
8.1.3 हम समरूपता के उपयोग किस प्रकार पता कर सकते हैं?

इंजीनियरों ने एक भवन का बाहर से समरूप नक्शा तैयार किया, डी.टी.पी. करने वालों ने इसकी आकृति कंप्यूटर की सहायता से बनाई जो कि उस भवन के समानुपाती है। इसका प्रयोग भवन का बैनर बनाने के लिए किया गया। फोटोग्राफर ने इसे समानुपात रूप में बढ़ा कर या घटाकर तस्वीरें निकालीं। विज्ञान के या समामाजजिक अध्ययन के मानचित्र इसी प्रकार अपने वास्तविक रूप के समानुपाती लघुकरण होते हैं। अर्थात, वास्तविक रूप के समरूप।

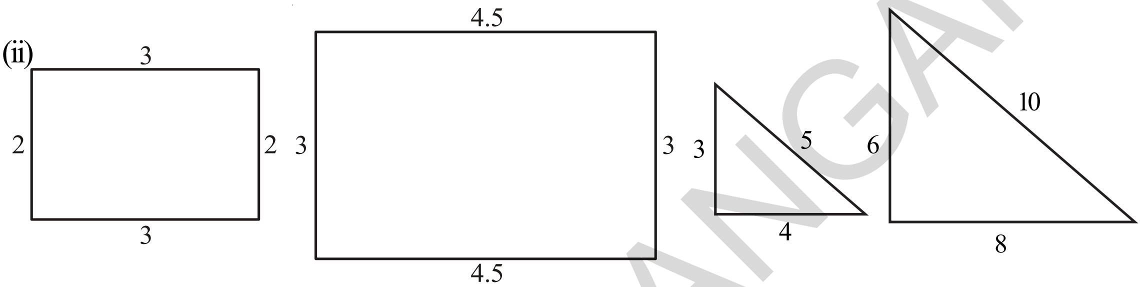
समरूपता की जाँच (Checking the similarity)

इन समरूप चित्रों को ध्यान से देखिए। इनकी भुजाएँ मापिए और संगत भुजाओं के अनुपात ज्ञात कीजिए, साथ ही संगत कोण ज्ञात कीजिए। आपने क्या देखा?

(i)



(ii)



पिछले पृष्ठ की आकृतियों के आधार पर निम्न तालिका की पूर्ति कीजिए।

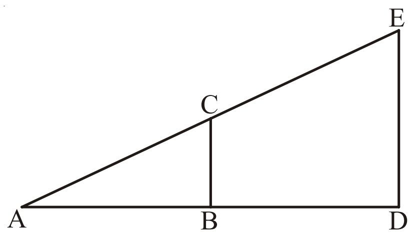
संलग्न भुजाओं का अनुपात	संलग्न कोण
(i) वर्ग $= \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$(90^o,90^o,90^o,90^o) = (90^o,90^o,90^o,90^o)$
(ii) समबाहु त्रिभुज $= \frac{2}{3} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$	$(60^o,60^o,60^o) = (60^o,60^o,60^o)$
(iv) आयत $= \frac{2}{3} =$.........	$(90^o,90^o,90^o,90^o) = (90^o,90^o,90^o,90^o)$
(iv) समकोण त्रिभुज $= \frac{3}{6} =$.........	(......., ..., ...,) = (......., ..., ...,)

इन प्रत्येक जोड़ों के उदाहरण में, हम संगत भुजाओं के अनुपात को समान पाएँगे और संलग्न कोणों के अनुपात भी समान होंगे।

एक अन्य उदाहरण देखिए।

यदि दो त्रिभुज ΔABC और ΔADE समरूप हैं तो हम लिख सकते हैं कि $\Delta ABC \sim \Delta ADE$.

यदि वे त्रिभुज एक दूसरे पर रखे जायें, तो आप देख सकते हैं कि उनके संलग्न कोण समान हैं।



अर्थात $\angle A \cong \angle A$

$\angle B \cong \angle D$ (क्यों ?)

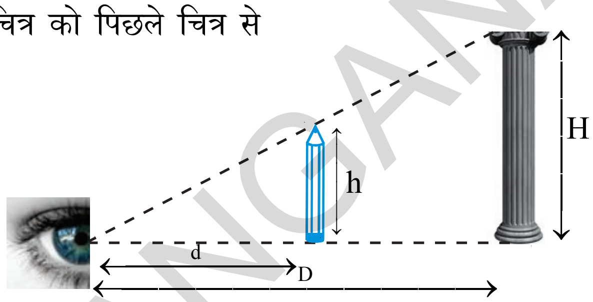
$\angle C \cong \angle E$ (क्यों ?)

और संगत भुजाओं का अनुपात भी समान होगा।

अर्थात $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE}$

आइए, अब हम समरूप त्रिभुज बनाने के सिद्धांत का उपयोग करते हुए दूरी पर स्थित वस्तुओं की ऊँचाई ज्ञात करें।

चित्र बनाना- एक लड़की ने एक स्तंभ के कुछ दूरी पर खड़े होकर हो में एक पेंसिल खड़े ढंग से लेकर उसे देखा। उसका चित्र पेंसिल के सहारे एक स्तंभ का चित्र बनाया। उसने देखा कि पेंसिल ने स्तंभ को पूरी तरह ढक लिया है। यदि इस चित्र को पिछले चित्र से तुलना करें तो हम कह सकते हैं कि



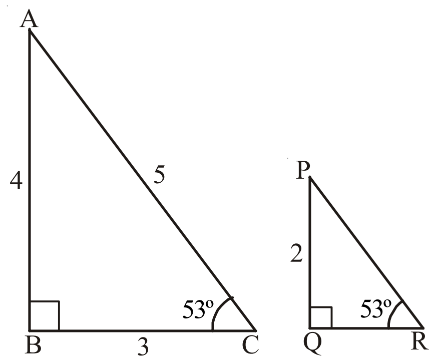
$$\frac{\text{स्तंभ की ऊँचाई (H)}}{\text{पेंसिल की लंबाई (h)}} = \frac{\text{स्तंभ से लड़की तक की दूरी (D)}}{\text{हाथ की लंबाई (d)}}$$

पेंसिल की लंबाई, भुजा की लंबाई और स्तंभ से लड़की तक की दूरी माप कर स्तंभ की ऊँचाई (H) का अनुमान लगा सकते हैं।

प्रयत्न कीजिए।

अब अपने हाथ में स्केल लेकर उसे अपनी पाठशाला भवन की दिशा में उठाइए और पाठशाला भवन की ऊँचाई का अनुमान लगाइए। (पाठशाला भवन से अपनी स्थिति में समुचित परिवर्तन लाइए) चित्र बनाइए और पाठशाला भवन की ऊँचाई का अनुमान लगाइए।

उदाहरण 1: $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ समरूप और $\angle C = 53^0$ हैं। PR भुजा की लंबाई और कोण $\angle P$ ज्ञात कीजिए।



हल : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

जब दो त्रिभुज समरूप होते हैं तो उनकी संलग्न कोण समान होते हैं और संगत भुजाएँ समानुपात होती हैं।

$$\frac{PR}{AC} = \frac{PQ}{AB} \Rightarrow \frac{PR}{5} = \frac{2}{4}$$

$$PR = \frac{2}{4} \times 5 = 2.5$$

अत:

$\angle R = \angle C = 53^o$

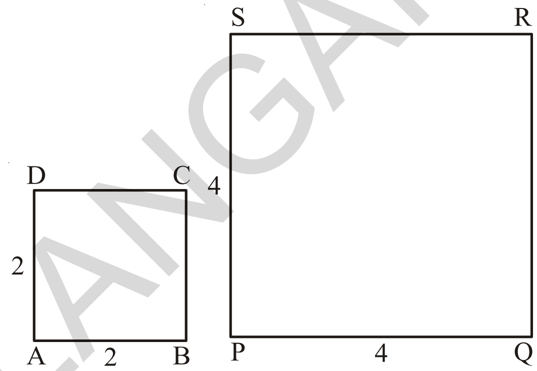
त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180^o होता है।

अर्थात $\angle P + \angle Q + \angle R = 180^o$

$\angle P + 90^o + 53^o = 180^o$

$\angle P = 180^o - 143^o = 37^o$

उदाहरण 2: दो भिन्न भुजाओं के वर्ग बनाइए। क्या आप कह सकते हैं कि वे समरूप हैं। दो वर्गों की परिमिति के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



सभी भुजाएँ समानुपाती हैं- $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DA}{SP} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

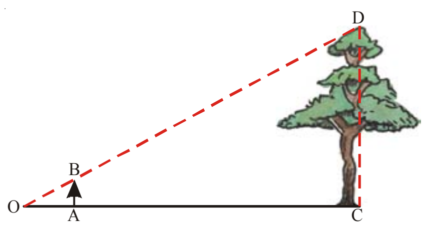
संलग्न कोण 90^o के हैं।

अत: वर्ग ABCD ~ वर्ग PQRS

□ABCD की परिमिति $= 4 \times 2 = 8$ सेमी

□PQRS की परिमिति $= 4 \times 4 = 16$ सेमी

उनकी परिमिति का अनुपात $= 8 : 16 = 1 : 2$ इनकी परिमिति समानुपाती है।



ABCD का क्षेत्रफल $= 2 \times 2 = 4\ cm^2$

PQRS का क्षेत्रफल $= 4 \times 4 = 16\ cm^2$

क्षेत्रफल का अनुपात $= 4 : 16 = 1 : 4 = 1^2 : 2^2$

$\therefore$ वर्गों के क्षेत्रफलों का अनुपात = वर्ग की संगत भुजाओं का अनुपात समान है।

उदाहरण 3: जगदीश ने एक स्केल को लंबवत ढंग से 1 मी. की दूरी पर रखकर एक पेड़ की ऊँचाई का अनुमान लगाना चाहा और यह आकृति बनाई। यदि पेड़ की स्केल द्वारा मापी गई ऊँचाई 85 सेमी हो और पेड़ से उस तक की दूरी 15 मी. हो तो पेड़ की वास्तविक ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

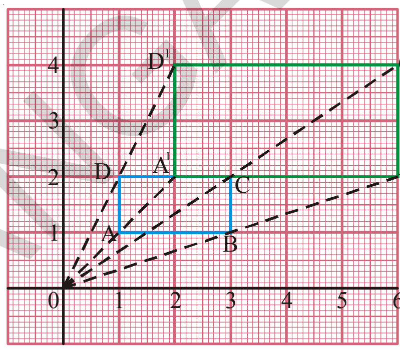
हल : $\Delta OAB \sim \Delta OCD$ आकृति में दो समरूप त्रिभुजों की भुजाएँ समानुपाती होती हैं।

$$\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD} = \frac{OB}{OD}$$

$$\therefore \frac{1}{15} = \frac{0.85}{CD} \Rightarrow CD = 0.85 \times 15 = 12.75 \text{ मी}$$

$\therefore$ पेड़ की ऊँचाई $= 12.75$ मी

8.2 विस्तारीकरण (Dilations) :



कभी-कभी हमें कुछ आकृतियों को बड़ा व छोटा करने की आवश्यकता पड़ती है। यहाँ दोनों ही परिस्थितियों में आकृतियाँ वास्तविक आकृति के समरूप ही होती हैं। तात्पर्य है कि अपने दैनिक जीवन में हम समरूप आकृतियाँ बनाते ही हैं। समरूपता का ध्यान रखते हुए किसी आकृति को बड़ा या छोटा करना विस्तारीकरण 'विस्तारीकरण (Dilation)' कहलाता है।

निम्न विस्तारीकरण ABCD को देखिए। यह एक आयत का आलेख कागज पर चित्रण है। प्रत्येक शीर्ष A, B, C, D केंद्र 'O' से जोड़ा गया है और लंबाई को A^1, B^1, C^1 और D^1 तक क्रमशः दो गुणा तक बढ़ाया गया है। फिर A^1, B^1, C^1, D^1 को जोड़कर आयत बनाया गया है जो कि आयत ABCD के दो गुणा है। यहाँ, O को विस्तारीकरण का केंद्र कहा जाता है और $\frac{OA^1}{OA} = \frac{2}{1} = 2$ मापन गुणन 'k' कहलाता है।

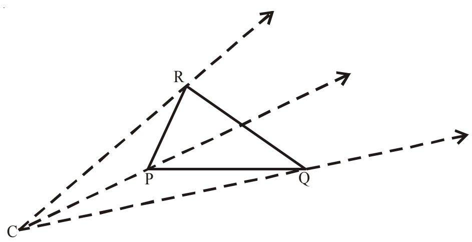
इसे कीजिए।

1. ग्राफ पेपर पर एक त्रिभुज बनाइए और इसे तीन गुणा विस्तारित करते हुए फिर एक त्रिभुज बनाइए। क्या ये दोनों आकृतियाँ समरूप हैं?
2. एक वर्ग को ग्राफ पर उतारकर उसकी विस्तारित करने का प्रयास कीजिए और मापन गुणन 4, 5 तक बढ़ाइए। आपने क्या देखा?

8.2.1 विस्तारीकरण की रचना (Constructing a Dilation) :

उदाहरण 4: विस्तारीकरण की रचना मापन गुणक $k = 2$ के साथ एक त्रिभुज का निर्माण केवल पटरी और प्रकार द्वारा कीजिए।

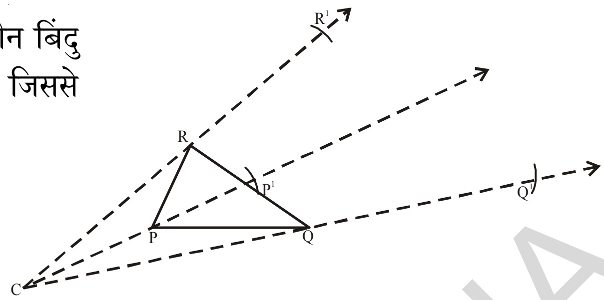
हल : सोपान 1: एक त्रिभुज ΔPQR बनाइए और केंद्र C से विस्तारीकरण किया जाये जो कि त्रिभुज में स्थित नहीं है। प्रत्येक शीर्ष जोड़कर त्रिभुज बनाइए।



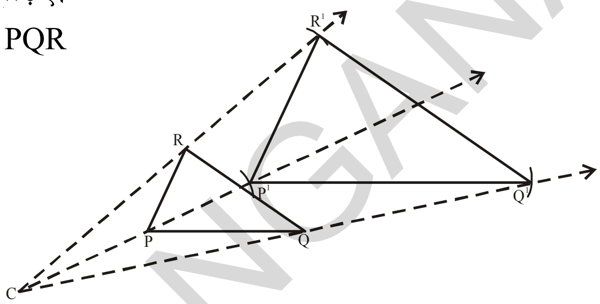
सोपान 2: कंपास का प्रयोग करते हुए, तीन बिंदु P^1, Q^1 और R^1 अंकित कीजिए जिससे कि $CP^1 = k\,(CP) = 2\,CP$

$CQ^1 = 2\,CQ$

$CR^1 = 2\,CR$



सोपान 3: P^1Q^1, Q^1R^1 और R^1P^1 को जोड़िए। ध्यान रहे कि $\Delta\, P^1Q^1R^1 \sim \Delta\, PQR$



अभ्यास - 8.1

1. किन्हीं पाँच सर्वसमान वस्तुओं के नाम बताइए जिनका उपयोग हमारे दैनिक जीवन में होता है।
2. (a) दो सर्वसमान आकृतियाँ बनाइए। क्या वे समरूप हैं? कैसे?

   (b) दो समरूप आकृतियाँ लीजिए। यदि आप इसमें से किसी को भी खिसकाते या पलटते हैं तो भी क्या वे समरूप हैं?
3. यदि $\Delta\, ABC \cong \Delta\, NMO$, सर्वसमान भुजाओं और कोणों को नामांकित कीजिए।
4. बताइए कि निम्न लिखित कथन सही हैं या गलत। कारण सहित बताइए।

   (i) 3 सेमी भुजा वाले दो वर्ग हैं। उनमें से एक को 45° तक घुमाने पर भी वे सर्वसमान हैं।

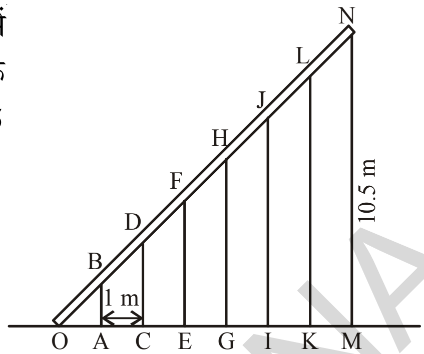
   (ii) कोई भी दो समकोण त्रिभुज जिनका कर्ण 5 सेमी हो, आपस में सर्वसमान होंगे।

   (iii) कोई भी दो वृत्त जिनकी त्रिज्या 4 सेमी हो एक-दूसरे के सर्वसमान होंगे।

   (iv) दो समबाहु त्रिभुज जिनकी भुजा 4 सेमी हो लेकिन $\Delta\, ABC$ और $\Delta\, LHN$ के रूप में नामांकित हों, एक-दूसरे के सर्वसमान नहीं हैं।

   (v) बहुभुज का प्रतिबिंब वास्तविक बहुभुज के सर्वसमान होता है।
5. बिंदुओं वाले कागज पर एक बहुभुज का निर्माण कीजिए। साथ ही इसके सर्वसमान आकृतियाँ और दर्पण प्रतिबिंब विविध स्थितियों में बनाइए।
6. बिंदुओं वाले वर्गाकार पेपर या ग्राफ पेपर पर एक आयत बनाइए। फिर इसकी समरूप आकृतियाँ बनाइए। दोनों की परिमिति और क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। उनकी संगत भुजाओं से उनके अनुपात की तुलना कीजिए।

7. एक लोहे के स्तंभ को 7 सात स्तंभों के सहारे चित्र में दिखाये अनुसार रखा गया है। यदि प्रत्येक दो स्तंभों के मध्य की दूरी 1 मी. है और अंतिम स्तंभ की ऊँचाई 10.5 मी. है तो लोहे के अन्य स्तंभों की लंबाई ज्ञात कीजिए।

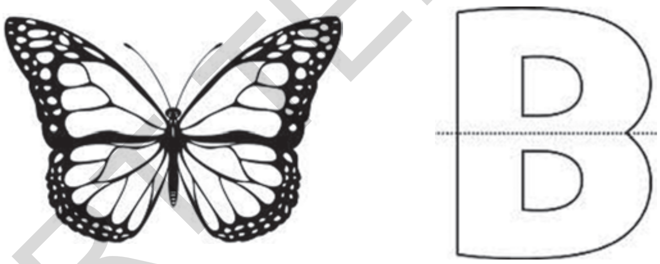


8. एक 3 मी. के लंबवत स्थित स्तंभ से 5 मी. की दूरी पर खड़े होकर सुधा ने स्तंभ के पीछे स्थित भवन को देखा। यदि स्तंभ का शीर्ष बिंदु, भवन के ऊपरी भाग के बराबर प्रतीत होता है, तो भवन की ऊँचाई का अनुमान लगाइए। स्तंभ से भवन तक की दूरी 10 मी. है। (संकेतः यहाँ सुधा की ऊँचाई का ध्यान नहीं रखना है)

9. किसी भी माप का एक चतुर्भुज बनाइए। उसका तीन गुणा विस्तारीकरण कीजिए। उनकी संगत भुजाओं को मापिए और उनकी समरूपता की जाँच कीजिए।

8.3 सममित (Symmetry) :

निम्नलिखित आकृतियाँ देखिए। यदि हम उन्हें उनके ठीक आधे से मोड़ें तो दोनों ओर समान आकृतियाँ प्राप्त होंगी।

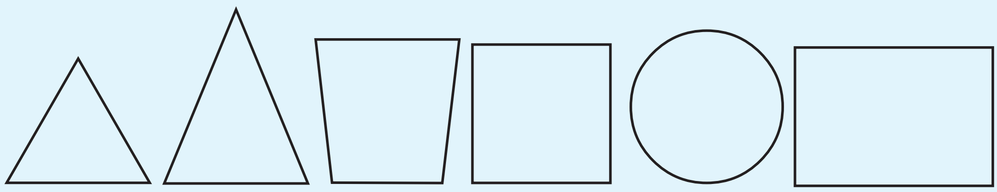


हम इस तरह की आकृतियों को क्या कहते हैं? उस रेखा को क्या कहते हैं जिसपर से इन दोनों को मोड़ा जाता है या जो दोनों को आधे से विभाजित करती है? क्या आप पिछली कक्षाओं में सीखी इन बातों को स्मरण कर सकते हैं?

ये सममित आकृतियाँ कहलाती हैं और जो रेखा इन्हें ठीक आधे से विभाजित करती है वह सममित रेखा कहलाती है।

इसे कीजिए।

इन आकृतियों में सभी संभव सममित रेखाएँ खींचिए।



नीचे कुछ सममित आकार देखिए जिन्हें हम अपने दैनिक जीवन में देखते ही रहते हैं।

ये सभी आकृतियाँ अनेक प्रकार की सममित आकृतियों से बनी हैं।

यहाँ, कुत्ते के चित्र को अद्भुत तरीके से दो सममित आकारों में विभाजित किया गया है। क्या आपको चित्र के केंद्र से एक लंबवत रेखा दिखाई दे रही है?

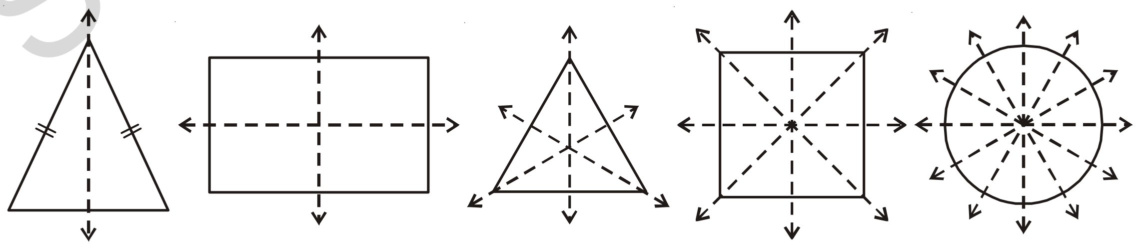
इसे ही 'सममित रेखा' या 'दर्पण रेखा' कहा जाता है।

हम इस प्रकार की सममितता को 'प्रतिबिंबित सममितता' या 'दर्पण सममितता' कहते हैं।

इस प्रकार का एक अन्य उदाहरण देखें, इस झील में पर्वत का प्रतिबिंब दिखाई दे रहा है। क्या यह प्रतिबिंब भी सममित है और इसकी सममित रेखा क्षितिजीय है जो प्रतिबिंब और वास्तविक पर्वत को अलग करती है। शायद ये पूर्णतः सममित न हों क्योंकि पर्वत का निचला भाग झील की सतह के कारण धुँधला दिखाई दे रहा है।

8.3.1 चक्रीय सममितता

निम्न लिखित सममित रेखाओं को ध्यान से देखिए।



विविध ज्यामितीय आकृतियों में विविध सममित रेखाओं का निर्माण हो सकता है।

इन सभी आकृतियों को घुमाइए। आप पाएँगे कि एक बार के घुमाव में ये कम से कम एक बार अवश्य अपनी आरंभिक वास्तविक रूप में होते हैं।

उदाहरण के लिए, आयत में सममित रेखाओं के दो अक्ष होते हैं। जब किसी आयत को घुमाया जाता है तो वह दो बार अपनी आरंभिक स्थिति की तरह दिखाई देता है। इस संख्या को 'घुमाव का क्रम (order of rotation)' के नाम से जाना जाता है।

अपनी प्राप्ति को इस तालिका में उचित स्थान पर लिखिए।

ज्यामितीय आकृति	सममित अक्षों की संख्या	आरंभिक स्थिति की प्राप्ति संख्या	घुमावों की संख्या
समद्विबाहु त्रिभुज	....	....	....
आयत	2	2	2
समबाहु त्रिभुज	....	....	....
वर्ग	....	....	....
वृत्त	....	....	....

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए।

1. घुमावों के क्रम और ज्यामितीय आकृतियों की सममितता के रेखाओं में क्या संबंध होता है?
2. एक नियमित बहुभुज में कितनी समिमत रेखाएँ होते हैं? क्या नियमित बहुभुज की भुजाओं और घुमावों के क्रम में कोई संबंध होता है? वह क्या है? वह क्या है?

8.3.2 बिंदु सममितता (Point symmetry)

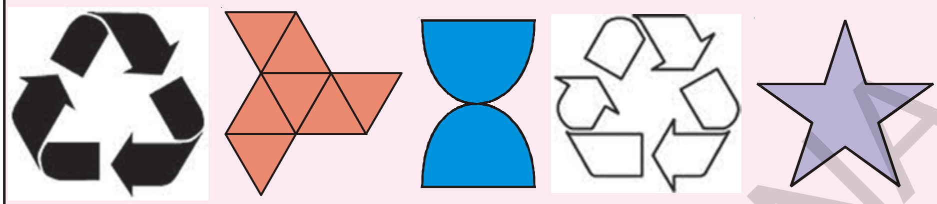
इस चित्र को देखिए। क्या इसमें सममित रेखाएँ हैं? इसमें सममित रेखाएँ नहीं हैं लेकिन इसमें अन्य प्रकार की सममितता है। यह चित्र ऊपर व नीचे दोनों ओर से एक ही तरह का दिखाई देता है। इसे बिंदु सममितता (point symmetry) कहते हैं। यदि आप इस चित्र को ध्यान से देखें तो पाएँगे कि इसका प्रत्येक भाग एक सुमेलन बिंदु (matching point) से जुड़ा है। यदि आप इसके केंद्र से एक रेखा खींचें तो यह इस चित्र को दो समान भागों में विभाजित करती है। केंद्र से कुछ और रेखाएँ खींचिए और इनकी जाँच कीजिए। अब हम यह कह सकते हैं कि इस चित्र में बिंदु सममितता (point symmetry) है।

क्या हम कुछ अँग्रेजी अक्षरों में भी इस प्रकार की बिंदु सममितता (point symmetry) देख सकते हैं?

X H I S N Z

प्रयत्न कीजिए।

1. पहचानिए कि किन चित्रों में बिंदु सममितता है?



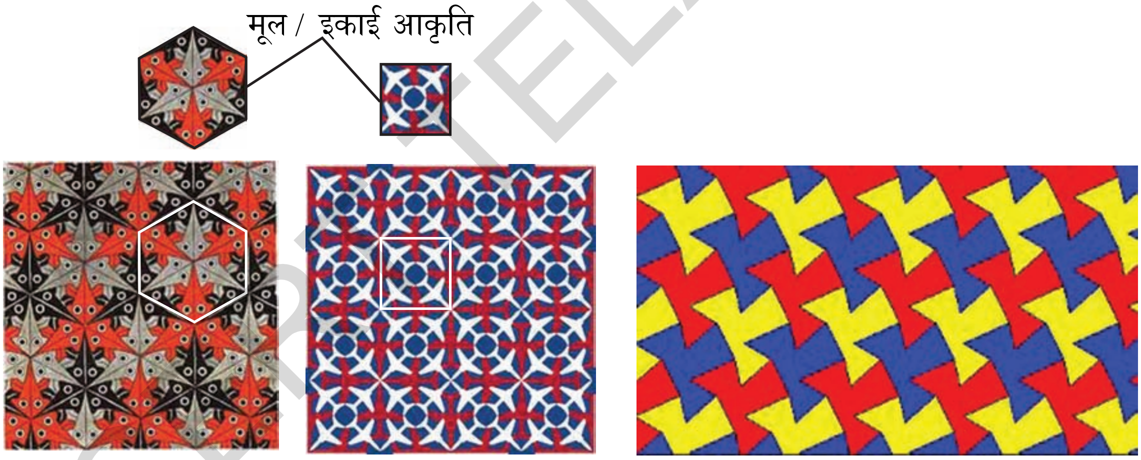
2. उपर्युक्त किन चित्रों में सममितता है?
3. रेखा सममितता और बिंदु सममिता में क्या संबंध है?

8.3.3 सममितता के प्रयोग

• अधिकतर वस्तुएँ जिनका हम उपयोग करते हैं वे कम से कम एक प्रकार की सममितता रखती हैं।

• मशीनों से बनीं अधिकांश वस्तुओं में सममितता पाई जाती है। इससे उत्पाद के दर में वृद्धि होती है।

इन पैटर्नों पर ध्यान दीजिए।



हम इन्हें फर्श, कपड़े पर पेंटिग, साड़ी आदि पर देख सकते हैं?

ये पैटर्न कैसे बनते हैं?

साधारणतः ये पैटर्न सर्वसमान आकृतियों या दर्पण प्रतिबिंबों को एक ढंग से व्यवस्थित करके बनाये जाते हैं। इसमें ध्यान रखा जाता है कि इन आकृतियों में कोई दूरी न रह जाये या ये एक-दूसरे पर न पड़ें। इस प्रकार इन्हें मूल आकृति के प्रत्येक दिशा में फैलाया जाता है।

इसे खचित पैटर्न/चतुरंगी पैटर्न (tessellation) कहा जाता है। ये आकृतियों की शोभा बढ़ाते हैं।

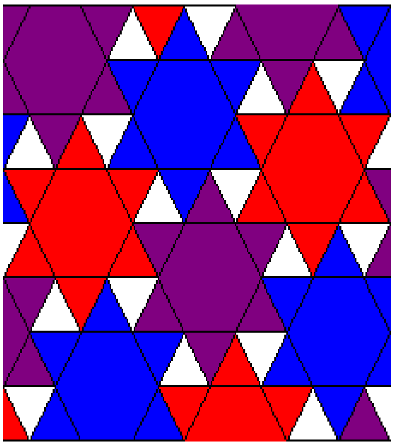
क्या पूर्ण आकृति भी एक सममित है?

मूल आकृति जिसका प्रयोग करते हुए यह खचित पैटर्न/चतुरंगी पैटर्न (tessellation) बनाया गया है, क्या वह भी सममित है?

आप देख सकते हैं कि चित्र के कुछ पैटर्न ही सममित हैं-आकृति (b) और दूसरे पैटर्न सममित नहीं हैं-आकृति (a), फिर भी मूल/इकाई आकृति सममित हैं।

निम्न खचित पैटर्नों पर ध्यान दीजिए।

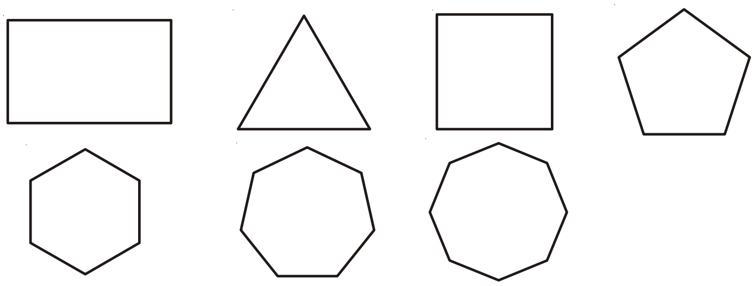
इन खचित पैटर्नों में मूल/इकाई आकृति क्या है?



आप ने ध्यान दिया होगा कि प्रयोग की हुई मूल इकाई आकृतियाँ खचित पंचभुज, आयत, वर्ग और समबाहु त्रिभुज हैं। अधिकांश खचित आकृतियाँ इनके द्वारा ही बनाई जाती हैं।

अभ्यास - 8.2

1. मोटे आकार वाले अँग्रजी अक्षरों को काटिए और अपनी नोटबुक में चिपकाइए। प्रत्येक अक्षर के लिए सभी संभव सममित रेखाएँ खींचिए।
   (i) कितने अक्षरों में सममित रेखाएँ नहीं है?
   (ii) कितने अक्षरों में एक सममित रेखा है?
   (iii) कितने अक्षरों में दो सममित रेखाएँ हैं?
   (iv) कितने अक्षरों में दो से अधिक सममित रेखाएँ है?
   (v) कितने अक्षरों में चक्रीय सममित रेखाएँ हैं?
   (vi) कितने अक्षरों में बिंदु सममितता है?
2. निम्न आकृतियों के लिए सममित रेखाएँ खींचिए। पहचानिए कि किनमें बिंदु सममितता है? क्या रेखा सममितता एवं बिंदु सममितता में कोई संबंध है?



3. कुछ प्राकृतिक वस्तुओं के नाम बताइए जिनमें कम से कम एक सममित रेखा पाई जाती है।

4. तीन खटित पैटर्न बनाइए। इनमें उपयोग की की गई मूल इकाई आकृति बताइए।

हमने क्या सीखा?

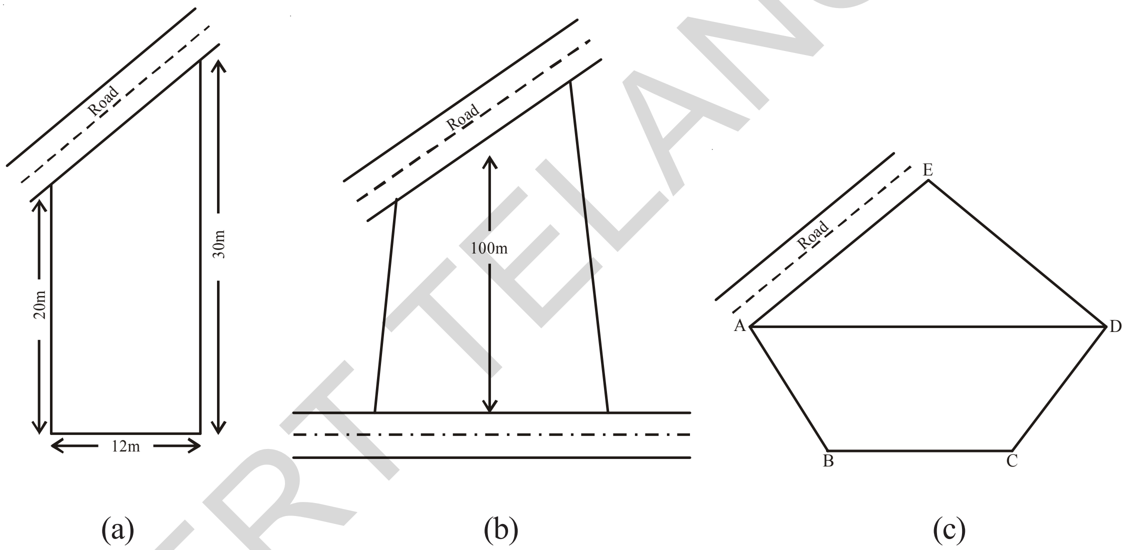
- वे आकृतियाँ सर्वसमान कहलाती है जो समान आकार एवं समान माप की हों।
- वे आकृतियाँ समरूप कहलाती है जिनके रूप समान हों लेकिन माप असमान हों।
- यदि हम सर्वसमान व समरूप आकृतियों को पलटते, खिसकाते या घुमाते हैं तो उनकी सर्वसमानता व समरूपता समान बनी रहती है।
- कुछ आकृतियाँ एक से अधिक सममित रेखाएँ रखती हैं।
- सममितताएँ तीन तरह की होती हैं। वे हैं- रेखा सममितता, चक्रीय सममितता और बिंदु सममितता।
- चक्रीय सममितता में आकृति को केंद्र को स्थिर रखते हुए घुमाने पर एक बार के घुमाव में एक या दो बार अपनी आरंभिक आकृति की तरह दिखाई देती है। वह संख्या जितनी बार वह एक घुमाव में आरंभिक अवस्था में दिखाई देती है, उसे सममितता की संख्या (order) कहा जाता है।
- किसी भी आकृति को उसकी समरूपता को बनाए रखते हुए बढ़ाने या घटाने को विस्तारीकरण (Dialation) कहते हैं।
- किसी समतल को बिना खाली स्थान छोड़े या एक-दूसरे के ऊपर रखे, दोहराते हुए व्यवस्थित करने को खचित पैटर्न (tessellations) कहते हैं।

अध्याय **9**

समतल आकृतियों का क्षेत्रफल
(AREA OF PLANE FIGURES)

9.0 परिचय

देवर्ष अपना घर बनाने के लिए एक प्लाट खरीदना चाहता है। उसने कुछ नीचे दिए गए आकार वाले प्लाट देखे।



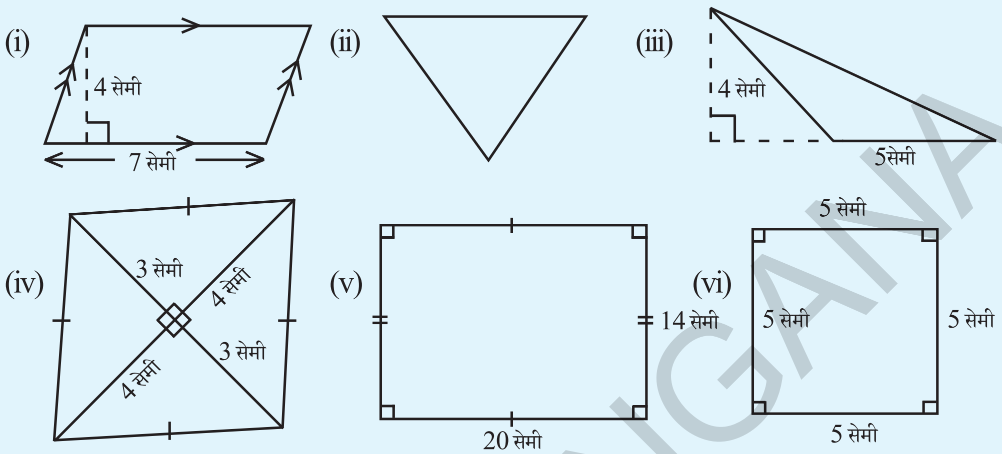
चित्र 9.1

प्लाट (a) समलंब चतुर्भुत आकार में, प्लाट (b) चतुर्भुजाकार में और प्लाट (c) पंचभुजाकार में है। वह अपना घर बनाने के लिए इनका क्षेत्रफल ज्ञात करना चाहता है।

हम सीख चुके हैं कि आयत, वर्ग, समांतर चतुर्भुज, त्रिभुज और समचतुर्भुज का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात किया जाता है? इस पाठ में हम सीखेंगे कि समलंब चतुर्भुज, चतुर्भुजाकार, वृत्त या वृत्त खंड का क्षेत्रफल कैसे मालूम किया जाता है। पहले याद करें कि हमने आयत, वर्ग, समांतर चतुर्भुज, त्रिभुज और समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के बारे में क्या सीखा है।

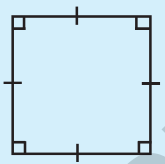
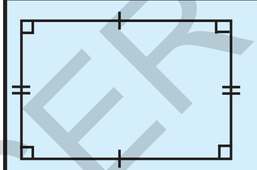
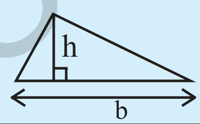
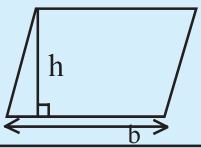
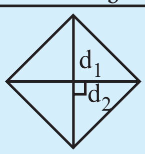
इसे कीजिए।

1. निम्न आकारों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



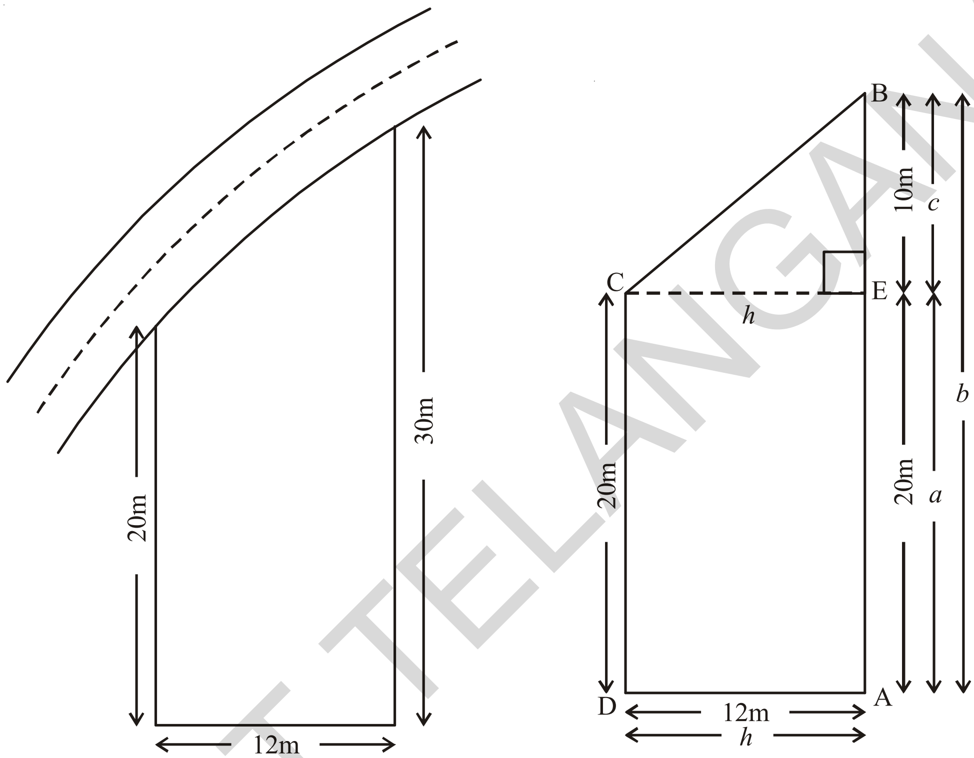
चित्र 9.2

2. नीचे समतल आकारों के कुछ माप दिए हैं, कुछ नहीं हैं। उन्हें पता कीजिए।

आकार	माप	क्षेत्रफल का सूत्र	दिए गए आकार का क्षेत्रफल
 वर्ग	वर्ग की भुजा 15 सेमी	A = भुजा×भुजा	....
 आयत	लंबाई = 20 सेमी चौड़ाई = ...	$A = l \times b$	280 वर्ग सेमी
 त्रिभुज	आधार = 5 सेमी ऊँचाई = ...	A = ...	60 वर्ग सेमी
 समांतर चतुर्भुज	ऊँचाई = 7.6 सेमी आधार = ...	$A = b \times h$	38 वर्ग सेमी
 समचतुर्भुज	d_1 = 4 सेमी d_2 = 3 सेमी	....	....

9.1 समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल (Trapezium)

कुमार ने मेन रोड पर एक प्लाट (चित्र 9.3) खरीदा। यह उसके पड़ोस के प्लाटों की तरह आयताकार नहीं है। उसकी केवल एक जोड़ी भुजाएँ आपस में समानांतर हैं। अतः यह लगभग समलंब चतुर्भुज के आकार का है। क्या आप इसका क्षेत्रफल मालूम कर सकते हैं?



(i) (ii)

चित्र 9.3

चित्र 9.3(i) में दिखाई गई भुजाओं के नाम दीजिए। 9.3 (ii) में दिखाए अनुसार CE ⊥ AB रेखा खींचकर लंब बनाइए। इस प्रकार हम इसे दो भागों में विभाजित कर सकते हैं, जिसमें एक आयताकार व दूसरा त्रिभुजाकार होगा। जैसा कि चित्र 9.3 (ii) में है।

Δ ECB का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\ h \times c \quad = \quad \times 12 \times 10 = 60$ वर्ग मी

ADCE आयत का क्षेत्रफल $= AE \times AD = 20 \times 12 = 240$ वर्ग मी

ABCD समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल $=$ Δ ECB का क्षेत्रफल + ADCE आयत का क्षेत्रफल

$= 60 + 240 = 300$ वर्ग मी

इस प्रकार हम आयत ADCE और Δ ECB के क्षेत्रफल को जोड़कर इस समलंब चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं।

$\overline{AD} = \overline{EC} = h$
$\overline{AE} = a$, $\overline{AB} = b = a + c$

$\therefore$ ABCD का क्षेत्रफल = ADCE का क्षेत्रफल + ΔECB का क्षेत्रफल

$$= (h \times a) + \frac{1}{2}(h \times c)$$

$$= h\left(a + \frac{1}{2}c\right)$$

$$= h\left(\frac{2a+c}{2}\right)$$

$$= h\left(\frac{2a+c}{2}\right) = \frac{h}{2}(a + a + c)$$

$$= \frac{1}{2}h\,(a+b)\ (\because\ c + a = b)$$

$= \frac{1}{2}$ ऊँचाई (समांतर भुजाओं का योग)

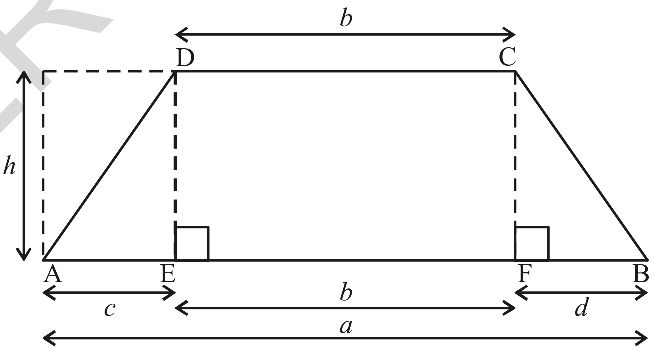
ऊपर दिए समीकरण में h, b और a का मान रखने पर

जहाँ	$h = 12$
	$a = 20$
	$b = 30$

ABDE समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}h\,(a + b)$

$= \frac{1}{2} \times 12 \times (30 + 20) = 300$ वर्ग मी.

उदाहरण 1: यहाँ एक खेल के मैदान का चित्र है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



चित्र 9.4

हल : यहाँ हम चित्र को एक आयत और एक त्रिभुज में नहीं बाँट सकते। लेकिन इसे हम एक आयत और दो त्रिभुजों में बाँट सकते हैं। $DE \perp AB$ तथा $CF \perp AB$ रेखा खींचिए। समलंब चतुर्भुज ABCD को तीन भागों में बाँटा गया है। एक आयत DEFC और अन्य दो त्रिभुज ΔADE और ΔCFB.

समलंब चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल

= Δ ADE का क्षेत्रफल + आयत DEFC का क्षेत्रफल + Δ CFB का क्षेत्रफल

$$= (\frac{1}{2} \times h \times c) + (b \times h) + (\frac{1}{2} \times h \times d)$$

$$= h\left[\frac{1}{2}c + b + \frac{1}{2}d\right]$$

$$= h\left[\frac{c + 2b + d}{2}\right]$$

$$= h\left[\frac{c + b + d + b}{2}\right]$$

$$= h\left[\frac{a + b}{2}\right] \quad (\because c + b + d = a)$$

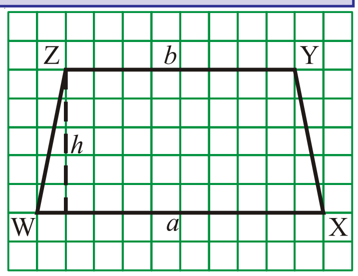
अतः हम समलंब चतुर्भुज के क्षेत्रफल के लिए सूत्र लिख सकते हैं-

$$= \text{ऊँचाई} \times \frac{\text{समांतर भुजाओं का योग}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{समांतर भुजाओं के बीच की दूरी} \times \text{समांतर भुजाओं का योग}$$

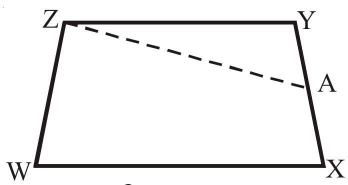
क्रियाकलाप

1. एक समलंब चतुर्भुज WXYZ ग्राफ पेपर पर उतारिए जैसा कि चित्र 9.5 (i) में दिखाया गया है।



चित्र 9.5 (i)

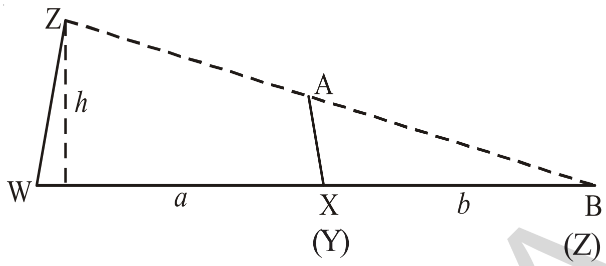
2. चित्र 9.5 (ii) में दिखाए अनुसार XY भुजा मोड़कर XY का मध्यबिंदु ज्ञात कीजिए।



चित्र 9.5 (ii)

3. AZ रेखा खींचिए।

4. भुजा ZA के साथ-साथ काटते हुए समलंब WXAZ को दो भागों में काटिए। $\triangle$ ZYA को ऐसे रखिए जैसा कि चित्र 9.5 (iii) में दिखाया गया है जिसमें AY को AX के ऊपर रखा गया है। इस प्रकार यदि हम 'Y' को 'X' से जोड़ें तो $\triangle$ WZB प्राप्त होता है।



चित्र 9.5 (iii)

बड़े त्रिभुज के आधार की लंबाई क्या है? इस त्रिभुज के क्षेत्रफल का व्यंजक लिखिए। चित्र 9.5(iii) की तरह

5. इस त्रिभुज और समलंब WXAZ का क्षेत्रफल समान है। (कैसे?) $\triangle$ WZB त्रिभुज के क्षेत्रफल के व्यंजक का उपयोग करते हुए समलंब के क्षेत्रफल का व्यंजक प्राप्त कीजिए।

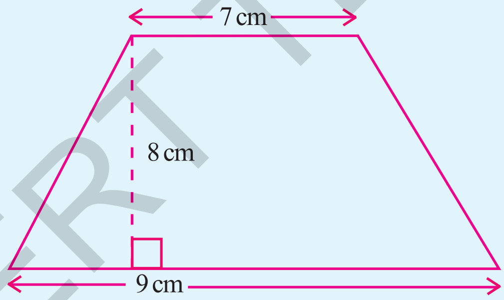
समलंब WXAZ का क्षेत्रफल = $\triangle$ WZB का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \times \text{ऊँचाई} \times \text{आधार} = \frac{1}{2} \times h \times (a+b)$$

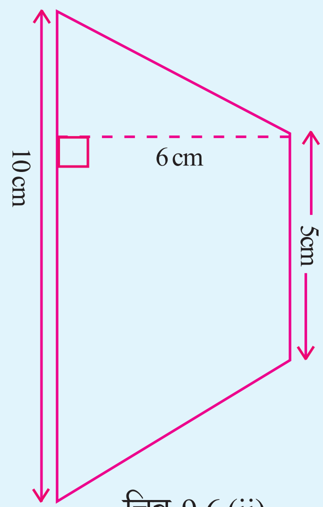
संकेत : ग्राफ में दी गई वर्गाकार इकाइयों को गिनकर क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

इसे कीजिए।

1. इस समलंब का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



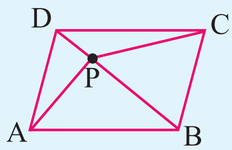
चित्र 9.6 (i)



चित्र 9.6 (ii)

2. एक समलंब का क्षेत्रफल 16 वर्ग सेमी है। एक समांतर भुजा की लंबाई 5 सेमी और दो समांतर भुजाओं के बीच की लंबाई 4 सेमी है। दूसरी समांतर भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए। इस समलंब को ग्राफ पेपर पर उतारने का प्रयास कीजिए और इनकी जाँच कीजिए।

3. ABCD समांतर चतुर्भुज जिसका क्षेत्रफल समांतर 100 वर्ग सेमी है। P एक बिंदु है जो समांतर चतुर्भुज के भीतर है। $\Delta APB + \Delta CPD$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



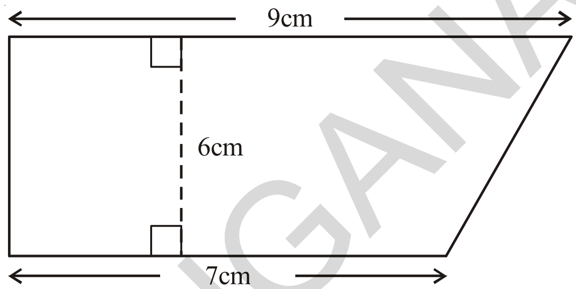
हल किए गए **उदाहरण**

उदाहरण 2: किसी समलंब की समांतर भुजाओं की लंबाई 9 सेमी और 7 सेमी और उनके बीच की दूरी 6 सेमी है। समलंब का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : समलंब की समांतर भुजाओं की लंबाई 9 सेमी और 7 सेमी है, तो दोनों समांतर भुजा की लंबाइयों का योग

(9 + 7) सेमी = 16 सेमी

उनके बीच की दूरी = 6 सेमी



समलंब का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (समांतर भुजाओं का योग) × (समांतर भुजाओं के बीच की दूरी)

$= (\frac{1}{2} \times 16 \times 6)$ वर्ग सेमी

= 48 वर्ग सेमी

उदाहरण 3: एक समलंब का क्षेत्रफल 480 वर्ग सेमी है। उसकी समांतर भुजाओं में से एक की लंबाई 24 सेमी और दोनों समांतर भुजाओं के बीच की दूरी 8 सेमी है। दूसरी समांतर भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल : एक समांतर भुजा की लंबाई = 24 सेमी

मान लीजिए कि दूसरी समांतर भुजा की लंबाई = 'x' सेमी

समलंब का क्षेत्रफल = 480 वर्ग सेमी

समांतर भुजाओं के बीच की दूरी = 8 सेमी

∴ समलंब का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times$ (समांतर भुजाओं का योग) × (समांतर भुजाओं के बीच की दूरी)

$\therefore \quad 480 = \frac{1}{2} \times (24 + x) \times 8$

$\Rightarrow \quad 480 = 96 + 4x$

$\Rightarrow \quad 480 - 96 = 4x$

$\Rightarrow \quad 4x = 384$

$\Rightarrow \quad x = \frac{384}{4} = 96 \text{ cm}$

∴ दुसरी समानान्तर भुजा की लम्बाई = 96 से.मी.

उदाहरण 4: एक समलंब की समांतर भुजाओं की लंबाई का अनुपात 4:1 है। समांतर भुजाओं के बीच की दूरी 10 सेमी है। यदि समलंब का क्षेत्रफल 500 वर्ग सेमी है। समलंब की समांतर भुजाओं की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल : समलंब का क्षेत्रफल = 500 वर्ग सेमी

समलंब की समांतर भुजाओं की बीच की दूरी = 10 सेमी

समलंब की समांतर भुजाओं की लंबाई का अनुपात = 4 : 1

मान लीजिए कि समलंब की समांतर भुजाओं की लंबाई क्रमशः $4x$सेमी और xसेमी है।

समलंब का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (समांतर भुजाओं का योग) (समांतर भुजाओं के बीच की दूरी)

$$\Rightarrow \quad 500 = \frac{1}{2}(x + 4x) \times 10$$

$$\Rightarrow \quad 500 = (x + 4x)\, 5$$

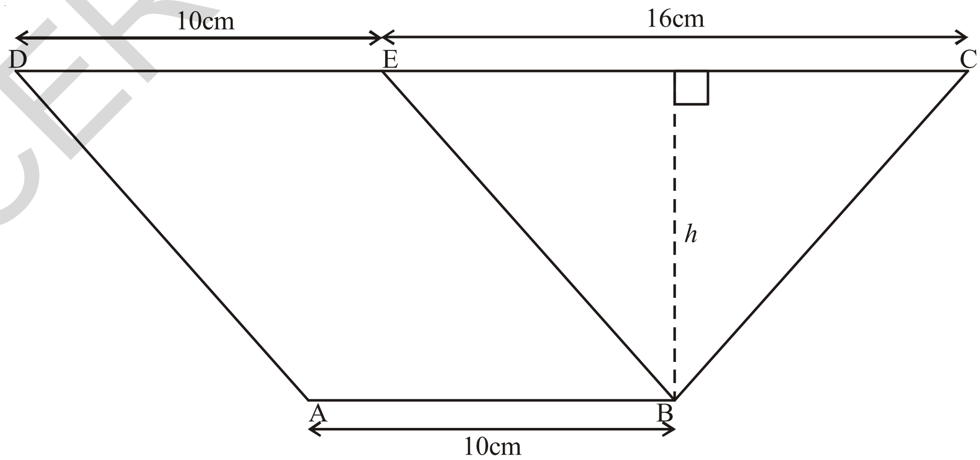
$$\Rightarrow \quad 500 = 25x$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{500}{25} = 20$$

∴ एक समांतर भुजा = 20 सेमी

∴ दूसरी समांतर भुजा = $4x = 4 \times 20 = 80$ सेमी (∵ समांतर भुजाओं का अनुपात 4 : 1)

उदाहरण 5: दिए गए चित्र में, ABED एक समांतर चतुर्भुज है, जिसमें AB = DE = 10 सेमी और Δ BEC का क्षेत्रफल 72 वर्ग सेमी है। यदि CE = 16 सेमी तो ABCD समलंब का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



चित्र 9.7

हल : Δ BEC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार × ऊँचाई

$$72 = \frac{1}{2} \times 16 \times h$$

$$h = \frac{72 \times 2}{16} = 9 \text{ सेमी}$$

समलंब ABCD में

$AB = 10$ सेमी

$DC = DE + EC$ ($\because$ $DE = AB$)

$= 10$ सेमी $+ 16$ सेमी $= 26$ सेमी

$\therefore$ ABCD समलंब का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times$ (समांतर भुजाओं का योग) (समांतर भुजाओं के बीच की दूरी)

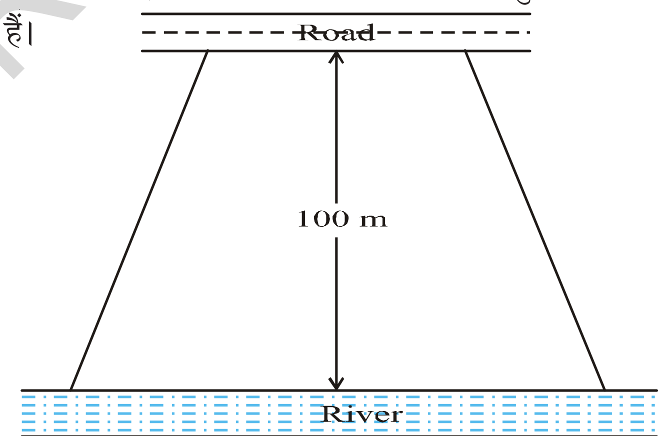
$= \frac{1}{2}(AB + DC)\, h$

$= \frac{1}{2}(10 + 26) \times 9$ वर्ग सेमी

$= 18 \times 9$ वर्ग सेमी

$= 162$ वर्ग सेमी

उदाहरण 6 : मोहन नदी के किनारे एक ज़मीन खरीदना चाहता है। एक ज़मीन का टुकड़ा जैसा कि इस आकृति में दिखाया गया है बिक्री के लिए उपलब्ध है। नदी के किनारे की ओर जमीन की लंबाई सड़क की ओर वाली लंबाई के दोगुना है। जहाँ नदी और सड़क समांतर हैं।



चित्र 9.8

इस ज़मीन का क्षेत्रफल 10,500 वर्ग मी. और नदी और सड़क के बीच की दूरी 100मी है तो नदी की ओर वाली ज़मीन की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि सड़क की ओर मैदान की लंबाई x मी. है।

तो नदी की ओर मैदान की लंबाई होगी = $2x$ मी.

उनके बीच की दूरी = 100 मी.

मैदान का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (समांतर भुजाओं का योग) (समांतर भुजाओं के बीच की दूरी)

$$10{,}500 = \frac{1}{2}(x + 2x) \times 100$$

$$10{,}500 = 3x \times 50$$

$$x = \frac{10{,}500}{3 \times 50} = 70 \text{ मी.}$$

$\therefore$ नदी की ओर मैदान की लंबाई $= 2x = 2 \times 70$

$= 140$ मी.

9.2 सामान्य चतुर्भुज का क्षेत्रफल (Quadrilateral)

कसी सामान्य चतुर्भुज का एक कर्ण खींचकर उसे दो त्रिभुजों में विभक्त किया जा सकता है। यह 'विभक्त करने की क्रिया' सामान्य चतुर्भुज के लिए सूत्र ज्ञात करने में सहायता देती है।

महेश ने समान्य चतुर्भुज ABCD को एक कर्ण AC खींचकर दो त्रिभुजों में विभक्त किया।

हम जानते हैं कि त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए दो मापों की आवश्यकता होती है, त्रिभुज का आधार और त्रिभुज की लंबवत ऊँचाई, जो उसके आधार से शीर्ष तक की दूरी है, यह आधार पर समकोण बनाती है।

महेश ने AC से B और D बिंदु से दोनों त्रिभुजों के लिए लंबवत ऊँचाई वाली रेखाएँ खींचीं। उनको क्रमशः h_1 और h_2 नाम दिया।

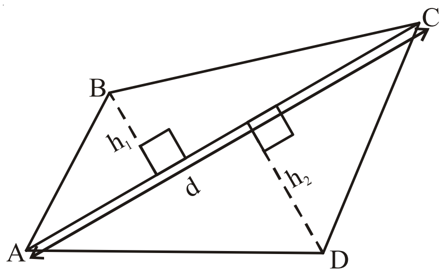


Fig.9.9

सामान्य चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल= (Δ ABC का क्षेत्रफल) + (Δ ADC का क्षेत्रफल)

$$= \frac{1}{2} \times AC \times h_1\Big) + \Big(\frac{1}{2} AC \times h_2\Big)$$

$$= \frac{1}{2} AC[h_1 + h_2]$$

सामान्य चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} d(h_1 + h_2)$ जहाँ

'd' कर्ण AC की लंबाई है

प्रयत्न कीजिए।

हम जानते हैं कि समांतर चतुर्भुज भी एक चतुर्भुज है। आइए, इसे भी हम दो त्रिभुजों में विभक्त करते हैं और इन दोनों त्रिभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं। इस प्रकार समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल भी ज्ञात करते हैं। इस प्रकार समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल भी ज्ञात करते हैं। क्या यह सूत्र आपको पूर्व में ज्ञात सूत्र से मेल खाता है?

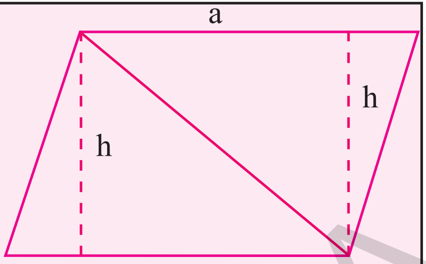
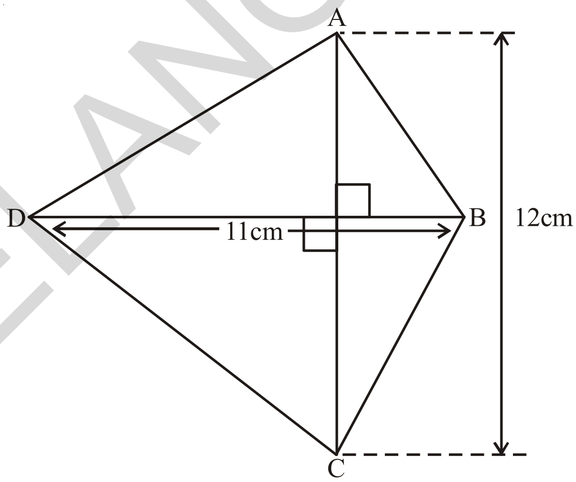


Fig.9.10

सामान्य चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ कर्ण की लंबाई $\times$ कर्ण पर आधारित दोनों लंबवत रेखाओं का योग

उदाहरण 7: सामान्य चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल



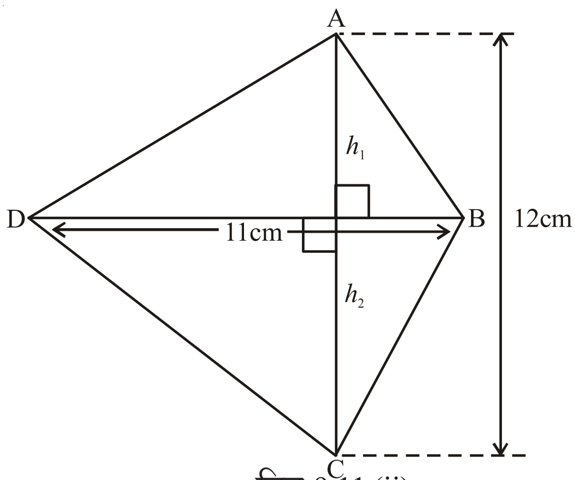
चित्र 9.11 (i)

हल : सामान्य चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} d(h_1 + h_2)$

कर्ण पर आधारित दोनों लंबवत रेखाओं का योग

$AC = (h_1 + h_2)$

$h_1 + h_2 = 12$ सेमी

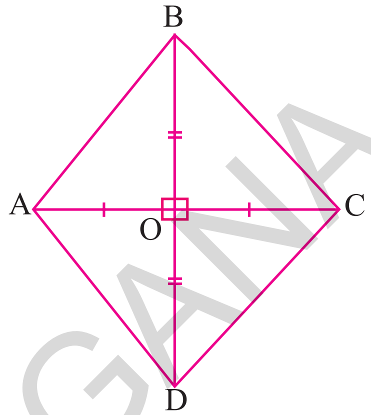


चित्र 9.11 (ii)

कर्ण BD की लंबाई = 11 सेमी

$\therefore$ सामान्य चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} d(h_1 + h_2) = \frac{1}{2} \times 12 \times 11 = 6 \times 11 = 66$ वर्ग सेमी

9.3 समचतुर्भुज का क्षेत्रफल (Rhombus) :



चित्र 9.12

त्रिभुजों में विभक्त करने वाली इस विधि को हम समचतुर्भुज का क्षेत्रफल का सूत्र ज्ञात करने में उपयोग कर सकते हैं।

समचतुर्भुज ABCD के चित्र में इसे दिखाया गया है। हम जानते हैं कि इनके कर्ण एक दूसरे के लंब समद्विभाजक हैं।

$\therefore OA = OC, \quad OB = OD$

और $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle AOD = 90^0$

समचतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = Δ ABC का क्षेत्रफल + Δ ADC का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} AC \times OB + \frac{1}{2} \times AC \times OD$$

$$= \frac{1}{2} \times AC\ (OB+OD)$$

$$= \frac{1}{2} \times AC \times BD \qquad (\because OB + OD = BD)$$

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times d_1 d_2$, जहाँ d_1, d_2 कर्णों की लंबाइयाँ हैं।

दूसरे शब्दों में समचतुर्भुज का क्षेत्रफल अपने कर्णों की लंबाइयों के गुणनफल का आधा होता है।

उदाहरण 8: समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिनके कर्णों की लंबाइयाँ 10 सेमी और 8.2 सेमी हों।

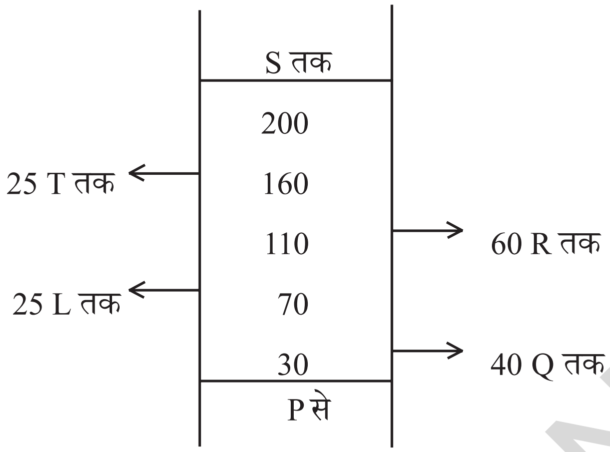
हल : समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times d_1 d_2$ जहाँ d_1, d_2 कर्णों की लंबाइयाँ हैं।

$= \frac{1}{2} \times 10 \times 8.2$ वर्ग सेमी

$= 41$ वर्ग सेमी

9.4 मैदान का सर्वेक्षण

एक सर्वेक्षणकर्ता ने एक मैदान का सर्वेक्षण करते हुए उसके माप अपनी सर्वेक्षण पुस्तिका में लिखे जो नीचे दिये गये हैं। उस मैदान का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



इन प्रदत्तों के आधार पर ज्ञात होता है-

1. यह मैदान षट्भुजाकार है जिसके शीर्ष P, Q, R, S, T और L हैं।
2. PS को कर्ण के रूप में है।
3. PS रेखा के एक ओर शीर्ष Q और R तथा दूसरी ओर शीर्ष T और R हैं।
4. बिंदु Q से PS पर डाला गया लंब A 40 मी, है। **इस प्रकार R,T,L से शेष लम्ब खींचिए ।**
5. सर्वेक्षण पुस्तिका में दिये माप वास्तविक हैं और इन्हें नीचे से ऊपर के क्रम में पढ़ा जाता है।
6. इस मैदान को दो त्रिभुज और दो समलंब के रूप में विभाजित किया गया है।

हम ऊपर दिए चित्र में से निम्नलिखित माप प्राप्त कर सकते हैं।

AC = PC – PA

= 110 – 30 = 80 मी

CS = PS – PC

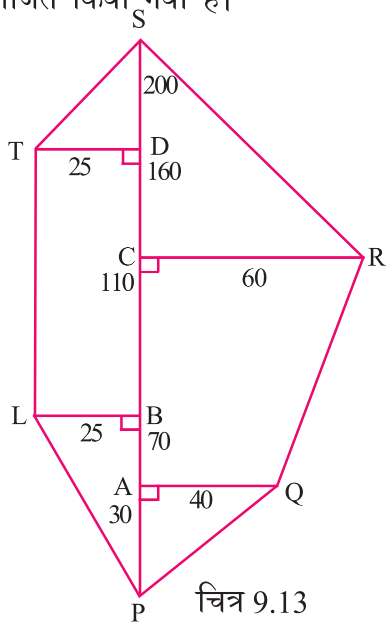
= 200 – 110 = 90 मी

DS = PS – PD

= 200 – 160 = 40 मी

BD = PD – PB

= 160 – 70 = 90 मी



चित्र 9.13

$\triangle$ APQ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times b \times h$

$= \frac{1}{2} \times 30 \times 40 = 600$ वर्ग मी

समलंब AQRC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times h(a+b)$

$= \frac{1}{2} \times AC\,(AQ + CR)$

$= \frac{1}{2} \times 80 \times (40 + 60)$

$= \frac{1}{2} \times 80 \times 100$

$= 4000$ वर्ग मी

$\triangle$ CRS का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times CR \times CS = \frac{1}{2} \times 60 \times 90 = 2700$ वर्ग मी

समलंब PLTS का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times h(a+b)$

$= \frac{1}{2} \times LB\,(TL + SP)$

$= \frac{1}{2} \times 25(90 + 200) \qquad (\because TL = BD = 90)$

$= \frac{1}{2} \times 25 \times 290$

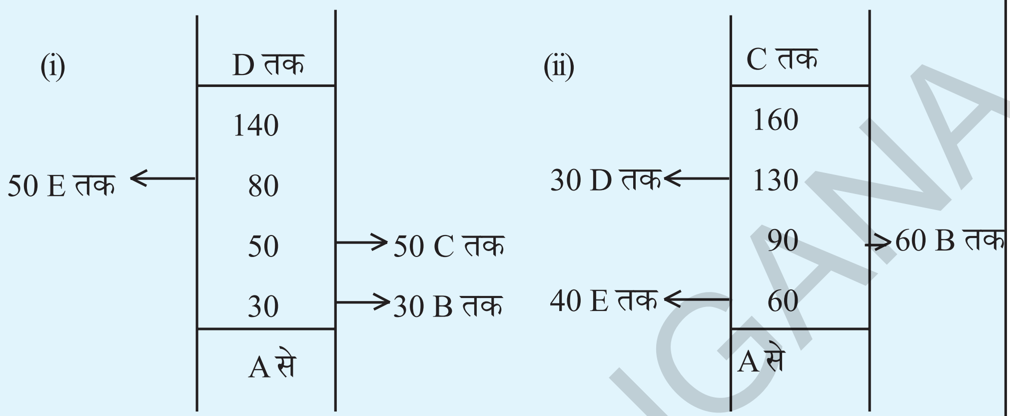
$= 3625$ वर्ग मी

मैदान का क्षेत्रफल $= 600 + 4000 + 2700 + 3625$

$= 10{,}925$ वर्ग मी

प्रयत्न कीजिए।

एक सर्वेक्षणकर्ता की सर्वेक्षण पुस्तिका में मैदानों के माप निम्नलिखित रूप से लिखे हैं, उनका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

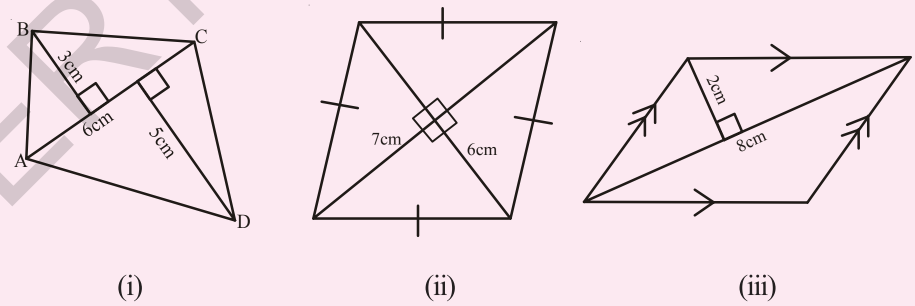


सोचिए और चर्चा कीजिए।

समांतर चतुर्भुज का कर्ण खींचकर इसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में बाँटा जाता है। क्या समलंब को भी दो सर्वांगसम त्रिभुजों में बाँटा जा सकता है?

प्रयत्न कीजिए।

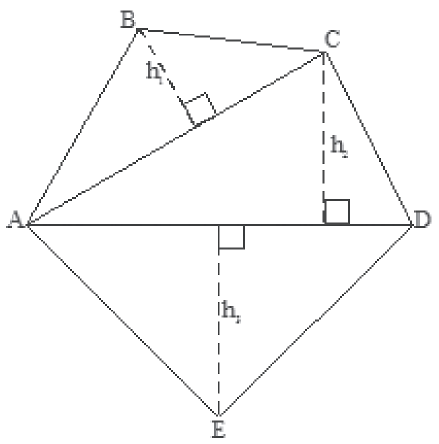
नीचे दिए चतुर्भुजों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

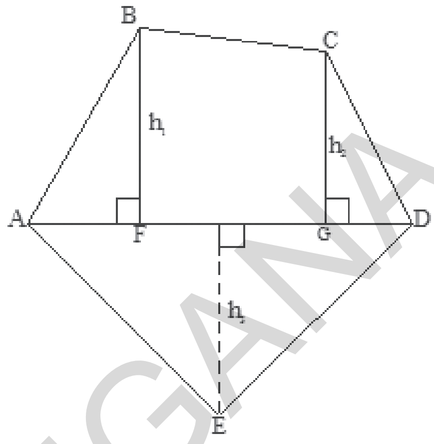


9.5 बहुभुज का क्षेत्रफल (Polygon) :

हम बहुभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए उसे अनेक साधारण आकार जैसे त्रिभुज, आयत आदि में विभाजित करते हैं। उनके क्षेत्रफल निकालते हैं। उन्हें जोड़कर बहुभुज का क्षेत्रफल मालूम कर लेते हैं।

नीचे दिये पंचभुजाकारों को देखिए। (चित्र 9.14)





(i) (ii)

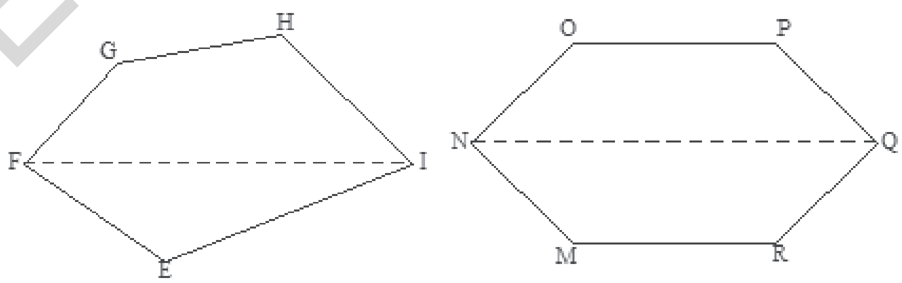
चित्र 9.14

चित्र (i) : कर्ण AC और AD की रचना करते हुए पंचभुज ABCDE को तीन भागों में बाँटा गया है। इसलिए ABCDE का क्षेत्रफल = ΔABC का क्षेत्रफल + ΔACD का क्षेत्रफल + ΔAED का क्षेत्रफल

चित्र (ii) : एक कर्ण AD और इस पर दो लंब BF और CG की रचना करते हुए पंचभुज ABCDE को चार भागों में बाँटा गया है। इसलिए ABCDE का क्षेत्रफल = समकोण त्रिभुज ΔBFA का क्षेत्रफल + समलंब BFGC का क्षेत्रफल + समकोण DGC का क्षेत्रफल + Δ DEA का क्षेत्रफल। इस तरह क्यों? (समलंब BFGC की समांतर भुजाओं को पहचानिए)

प्रयत्न कीजिए।

(i) इन बहुभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए इन्हें विभिन्न भागों (त्रिभुजों एवं समलंबों) में विभाजित कीजिए।



बहुभुज EFGHI का एक विकर्ण FI है। बहुभुज MNOPQR का एक विकर्ण NQ है।

चित्र 9.15

(ii) चित्र 9.14 में बहुभुज ABCDE को विभिन्न भागों में बाँटा गया है। यदि AD= 8 सेमी, AH = 6 सेमी, AF=3सेमी और BF=2सेमी, CH = 3 सेमी और EG = 2.5 सेमी है तो इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

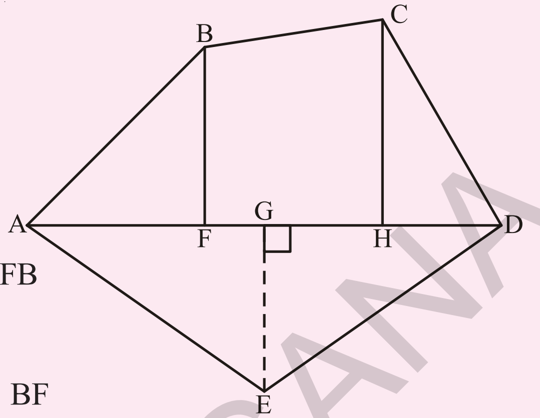


Fig.9.16

बहुभुज ABCDE का क्षेत्रफल = ΔAFB का क्षेत्रफल + _______

ΔAFB का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times AF \times BF$

$= \frac{1}{2} \times 3 \times 2 =$ _______

FBCH का क्षेत्रफल = $FH \times \frac{(BF + CH)}{2}$

$= 3 \times \frac{(2+3)}{2}$ [$\because$ FH = AH - AF]

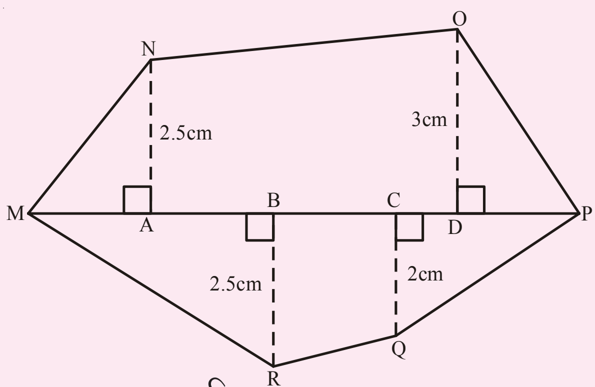
Δ CHD का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ HD $\times$ CH = _______

Δ ADE का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ AD $\times$ GE = _______

इसलिए बहुभुज ABCDE का क्षेत्रफल = ...

(iii) बहुभजु MNOPQR का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (fig.9.17) यदि MP = 9 सेमी, MD = 7 सेमी, MC = 6 सेमी, MB = 4 सेमी, MA = 2 सेमी

NA, OC, QD और RB कर्ण MP पर खींचे गए लंब हैं।



चित्र 9.17

उदाहरण 9: दिए गए मैदान का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। उनकी भुजाएँ भी बताइए। सभी माप मीटर में हैं।

हल : ABCDE का क्षेत्रफल = Δ ABH का क्षेत्रफल + समलंब BCFH का क्षेत्रफल + Δ CDF का क्षेत्रफल + Δ AED का क्षेत्रफल

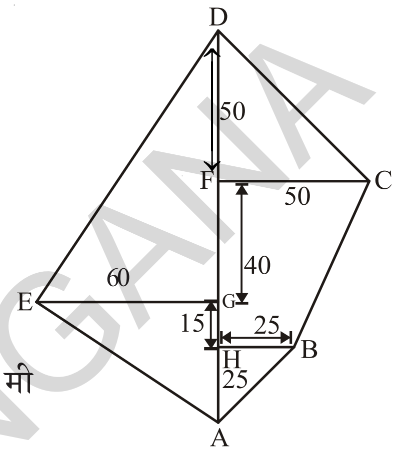


Fig. 9.18

अब, ABH का क्षेत्रफल

$$= \times AH \times HB$$

$$= \frac{1}{2} \times 25 \times 25$$

$$= \frac{625}{2} \text{ वर्ग मी} = 312.5 \text{ वर्ग मी}$$

समलंब BCFH का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times (HB + FC) \times HF$

$$= \frac{1}{2}(25 + 50) \times 55 \text{ वर्ग मी}$$

$$= \frac{75 \times 55}{2} \text{ वर्ग मी} = 2062.5 \text{ वर्ग मी}$$

Δ CDF का क्षेत्रफल $= \times FC \times DF$

$$= \frac{1}{2} \times 50 \times 50 \text{ वर्ग मी} = 1250 \text{ वर्ग मी}$$

Δ AED का क्षेत्रफल $= \times AD \times EG$

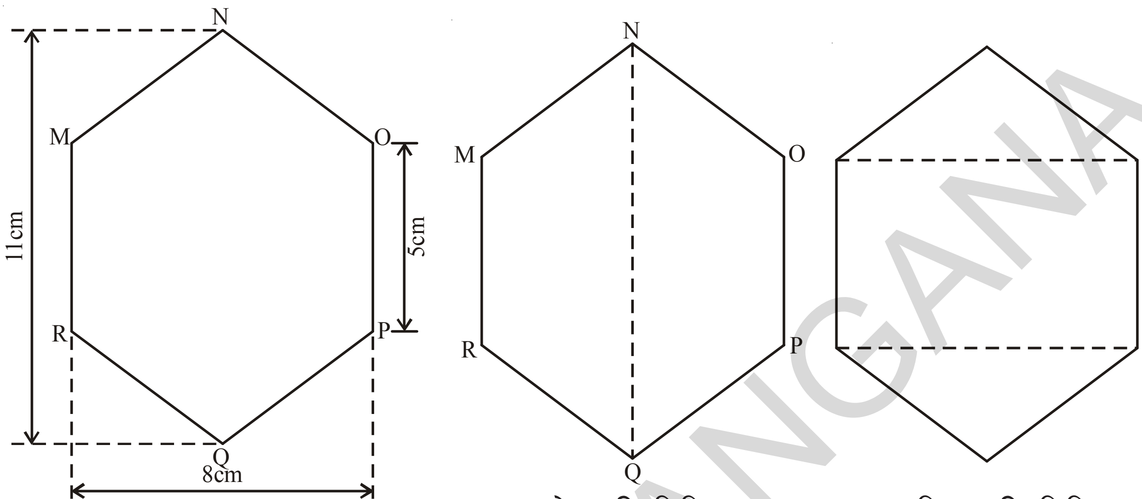
$$= \frac{1}{2} \times 130 \times 60$$

$$= 3900 \text{ वर्ग मी}$$

अतः ABCDE का क्षेत्रफल = 312.5 वर्ग मी + 2062.5 वर्ग मी + 1250 वर्ग मी + 3900 वर्ग मी

= 7525 का क्षेत्रफल

उदाहरण 10: MNOPQR (चित्र 9.19) एक षड्भुज है जिसकी प्रत्येक भुजा 5 सेमी है। सुरेश और ऋषिका ने इसे दो विभिन्न प्रकार से विभाजित किया जैसा चित्र में दिखाया गया है। दोनों प्रकार का उपयोग करते हुए इस षड्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



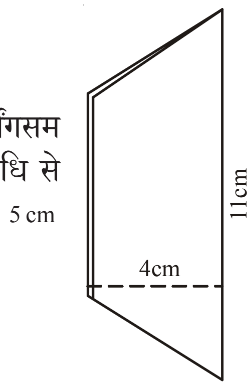
सुरेश की विधि ऋषिका की विधि

(i) (ii)

चित्र 9.19

हल : **अमन की विधि :**

क्योंकि यह एक षड्भुज है इसलिए NQ इस षड्भुज को दो सर्वांगसम समलंबों में विभाजित करता है। आप इसे कागज मोड़ने की विधि से सत्यापित कर सकते हैं।



अब समलंब MNQR का क्षेत्रफल= $4 \times \dfrac{11+5}{2}$

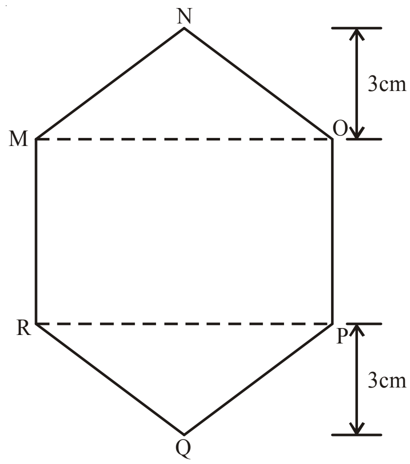
= $2 \times 16 = 32$ वर्ग सेमी

इसलिए षड्भुज MNOPQR का क्षेत्रफल = $2 \times 32 = 64$ वर्ग सेमी

चित्र9.20

ऋषिका की विधि

ΔMNO और ΔRPQ सर्वांगसम त्रिभुज हैं जिनमें से प्रत्येक का शीर्षलंब 3 सेमी है। (चित्र4) आप इन त्रिभुजों को काटकर और एक दूसरे के ऊपर रखकर इसका सत्यापन कर सकते हैं।



ΔMNO का क्षेत्रफल= $\times 8 \times 3 = 12$ वर्ग सेमी

= ΔRPQ का क्षेत्रफल

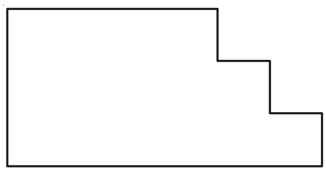
आयत MOPR का क्षेत्रफल = 8   5 = 40 वर्ग सेमी

अब, षड्भुज MNOPQR का क्षेत्रफल= 40+12+12 = 64 वर्ग सेमी

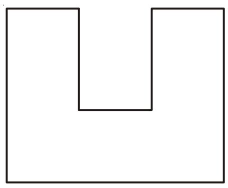
चित्र9.21

अभ्यास - 9.1

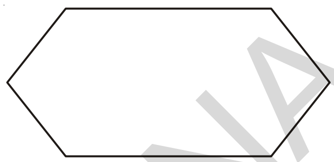
1. दिए गए आकारों को निर्देश के अनुसार विभाजित कीजिए।



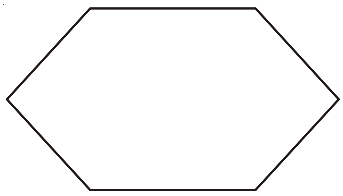
(i) 3 आयतों में



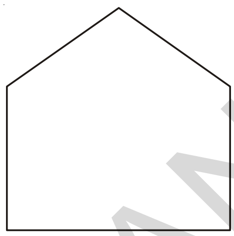
(ii) 3 आयतों में



(iii) 2 समलंब

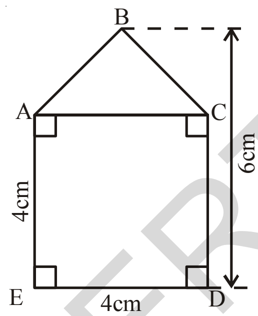


(iv) 2 त्रिभुज और एक आयत

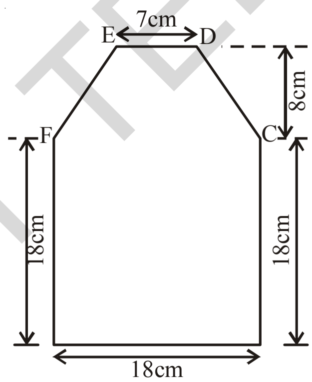


(v) 3 त्रिभुज

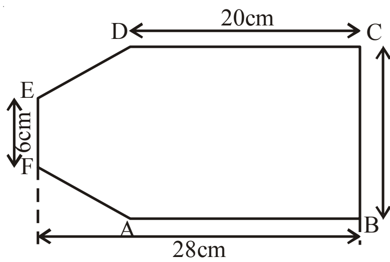
2. प्रत्येक आकार का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



(i)



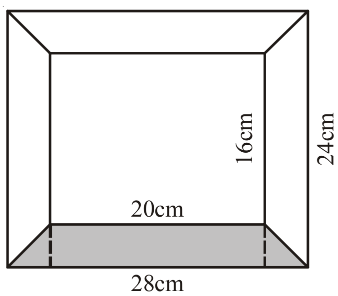
(ii)



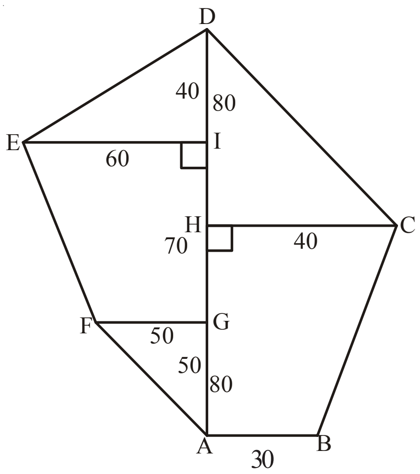
(iii)

3. चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जब कर्ण AC की लंबाई = 10 सेमी और AC पर आधारित B और D लंबों की लंबाई क्रमशः 5 सेमी और 6 सेमी है।

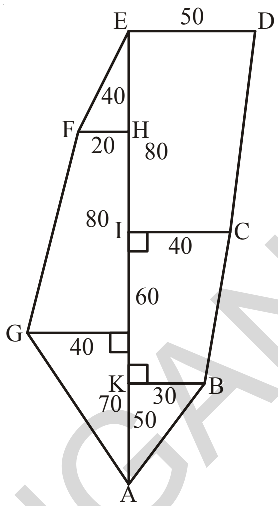
4. संलग्न चित्र का बाहरी माप 28 सेमी × 24 सेमी और आंतरिक माप 20 सेमी × 16 सेमी है। रंगीन भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए यदि प्रत्येक भाग की चौड़ाई समान है।



5. प्रत्येक मैदान का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। सभी माप मीटर में हैं।



(i)

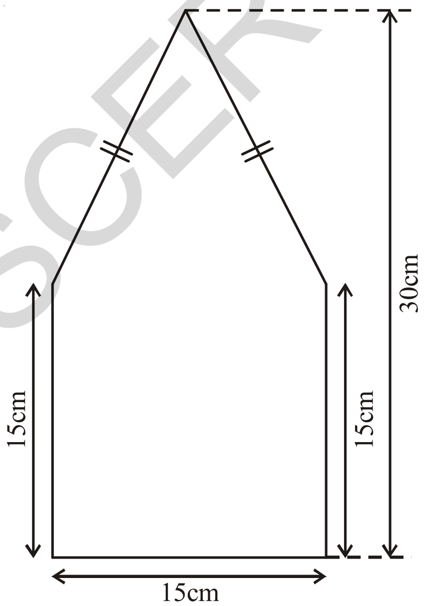


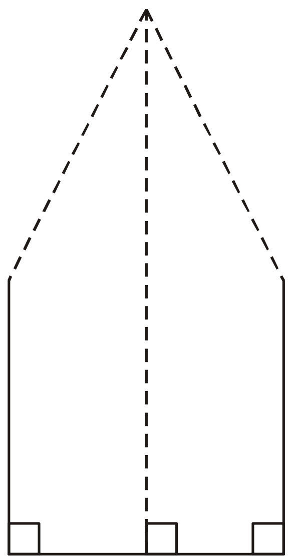
(ii)

6. एक समलंब की समांतर भुजाओं की लंबाई का अनुपात 5:3 और उनके बीच की दूरी 16 सेमी है। यदि समलंब का क्षेत्रफल 960 वर्ग सेमी है तो उसकी समांतर भुजाओं की लंबाई बताइए।

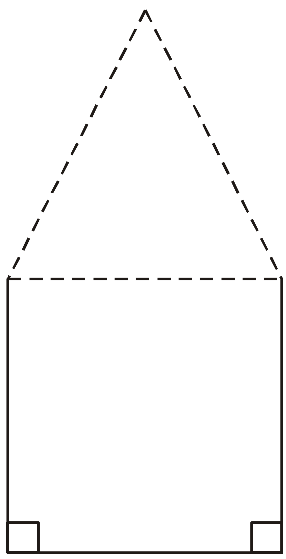
7. किसी भवन के फर्श में समचतुर्भुज आकार की 3000 टाइलें हैं और इनमें से प्रत्येक के कर्ण 45 सेमी और 30 सेमी लंबाई के हैं। यदि प्रत्येक टाइल का दाम रु.20 हो तो पूरे फर्श का खर्च ज्ञात कीजिए।

8. एक पंचभुज आकार की ज़मीन है जैसा कि चित्र में दिखाया गया है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए ज्योति और रशीदा ने इसे दो अलग-अलग तरीके से विभाजित किया। दोनों तरीके से क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए और बताइए। आपने क्या ध्यान दिया?





Jyoti Diagram



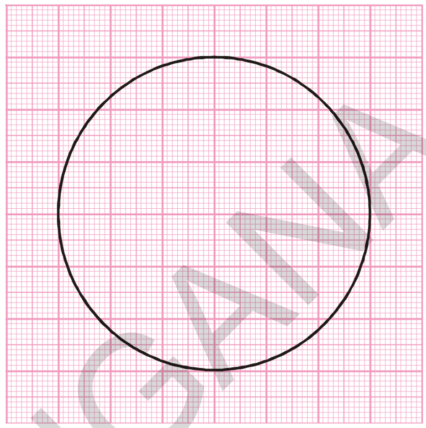
Rashida's Diagram

9.6 वृत्त का क्षेत्रफल

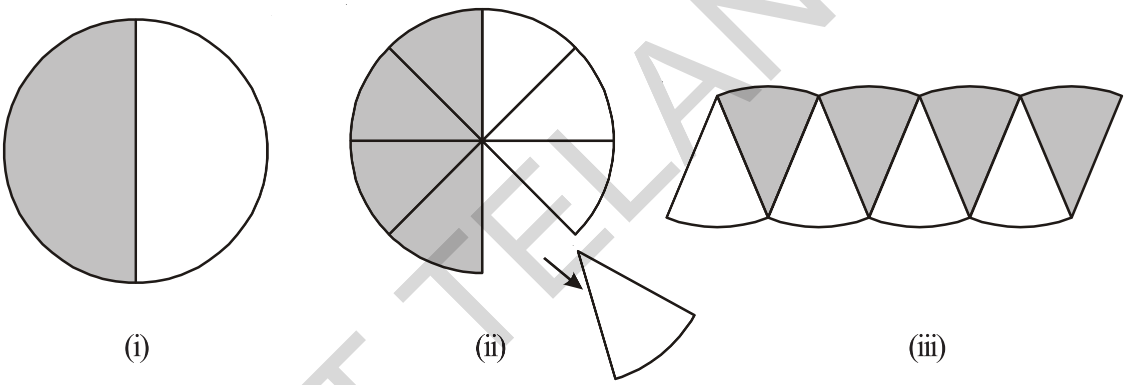
आइए, ग्राफ पेपर द्वारा वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

4 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त बनाइए। उसमें घिरे वर्गाकार खानों को गिनते हुए वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (चित्र 9.22).

इसके किनारे सीधे नहीं हैं इसलिए इस विधि से हम इसका अनुमानित क्षेत्रफल ही निकाल सकते हैं। वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करने का एक और तरीका भी है।



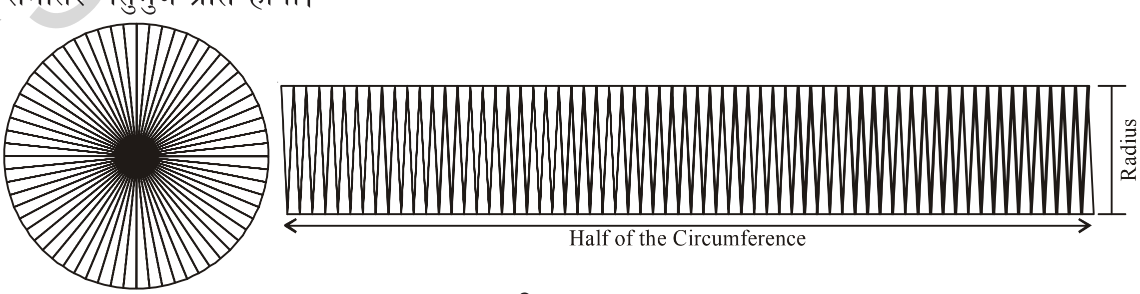
चित्र 9.22



चित्र 9.23

एक वृत्त बनाइए और इसका आधा भाग छायांकित कीजिए जैसा कि (चित्र9.23(i)) में दिखाया गया है, अब वृत्त को आठ बराबर हिस्सों में मोड़िए। इन्हें मोड़ से काट लीजिए जैसा कि चित्र 9.23(ii)) में दिखाया गया है।

ऊपर दिखाए अनुसार हम इन्हें और अधिक वृत्त खंडों में विभाजित कर सकते हैं। इन अलग-अलग टुकड़ों को चित्र (iii), में दिखाए अनुसार रखिए जो लगभग एक समांतर चतुर्भुज प्राप्त होता है। यदि हम वृत्त को समान 64 वृत्त खंडों में विभाजित करते हैं तो हमें (चित्र 9.24) में दिखाए अनुसार लगभग समांतर चतुर्भुज प्राप्त होगा।



चित्र 9.24

इस आयत की चौड़ाई क्या होगी? इस आयत की चौड़ाई वृत्त के अर्द्धव्यास 'r' के समान है।

यदि इस वृत्त को 64 वृत्त खंडों में विभाजित किया जाता है और यदि इन्हें एक आयत की तरह रखा जाता है। आयत की लंबाई 32 वृत्त खंडों के चाप के बराबर है जो वृत्त की परिधि का आधा है। (चित्र 9.24)

वृत्त का क्षेत्रफल = वृत्त खंडों से बनाए गए आयत का क्षेत्रफल $= l \times b$

= (परिधि का आधा) × त्रिज्या

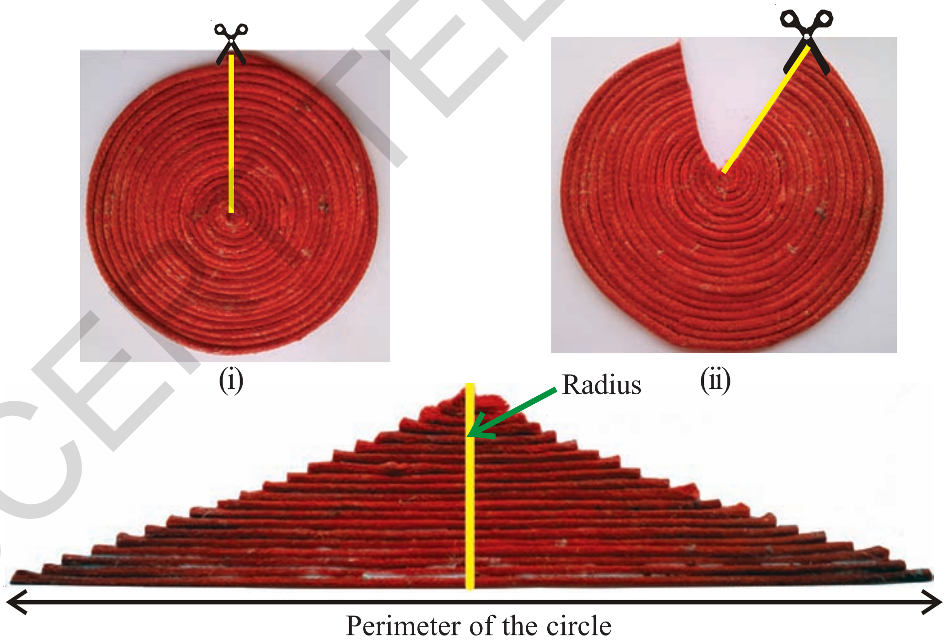
$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2$

इसलिए वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

धागे का क्रियाकलाप :

'द कॉमेंट्री आफ तलमूद' (जूईश की किजाब) में वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करने के सूत्र को बड़ी अच्छी तरह प्रतिपादित किया गया है- $A = \pi r^2$

कल्पना कीजिए कि एक वृत्त एक धागे से घिरा है। धागे को चित्र में दिखाए अनुसार ऊर्ध्वाधर व्यास रेखा पर काटिए। प्रत्येक धागे को चित्र (iii) की तरह व्यवस्थित करने पर एक समद्विबाहु त्रिभुज प्राप्त होगा।



(iii)

इस समद्विबाहु त्रिभुज का आधार वृत्त की परिधि के समान होगा और ऊँचाई वृत्त की त्रिज्या के समान होगी।

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार × ऊँचाई

$$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r$$

$$= \pi r^2$$

$\therefore$ वृत्त की क्षेत्रफल $= \pi r^2$ (जहाँ r वृत्त की त्रिज्या है)

प्रयत्न कीजिए।

ग्राफ पेपर पर अलग-अलग त्रिज्या के वृत्त बनाइए। वर्गों को गिनते हुए वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। सूत्र का प्रयोग करते हुए भी उनका क्षएत्रफल ज्ञात कीजिए। उत्तरों की तुलना कीजिए।

उदाहरण 11: एक तार को एक वर्ग के रूप में मोड़ा गया है जिसकी भुजा 27.5 सेमी है। इस तार को सीधा करके पुनः वृत्त के रूप में मोड़ा गया। बनाए गए वृत्त का क्षेत्रफल क्या होगा?

हल : तार की लंबाई = वर्ग की परिमिति

$= (27.5 \times 4)$ सेमी $= 110$ सेमी

जब तार को वृत्त के रूप में मोड़ा गया तो उसकी परिधि भी 110 सेमी ही प्राप्त हुई।

मान लीजिए कि r वृत्त की त्रिज्या है।

तो, वृत्त की परिधि $= \quad = 2 \times \quad \times r$ सेमी

$= \quad r$ सेमी

$\therefore \quad 110 = \quad r$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{110 \times 7}{44} \text{ सेमी}$$

$= 17.5$ सेमी

उदाहरण 12: एक वृत्त की परिधि 22 सेमी है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। और इसके अर्द्धवृत्त का क्षेत्रफल भी बताइए।

हल : मान लीजिए कि इस वृत्त की त्रिज्या r सेमी

तो वृत्त की परिधि $= 2\pi r$

$\therefore \quad 2\pi r = 22$ सेमी

$$2 \times \quad \times r = 22 \text{ सेमी}$$

$$r = 22 \times \quad \times \quad = 3.5 \text{ सेमी}$$

$\therefore$ वृत्त की त्रिज्या $= 3.5$सेमी

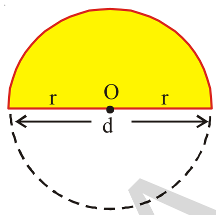
वृत्त का क्षेत्रफल $\pi r^2 = \left(\frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}\right)$ वर्ग सेमी

$= 38.5$ वर्ग सेमी

अर्द्धवृत्त का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\pi r^2$

$= \frac{1}{2} \times 38.5 = 19.25$ वर्ग सेमी

अर्द्धवृत्त का क्षेत्रफल क्या होगा?

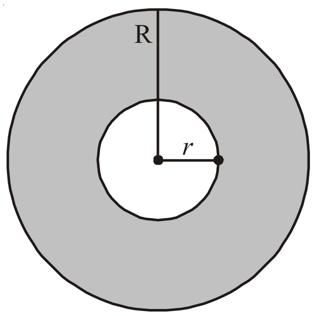


इस वृत्त के रंगीन क्षेत्र का अनुमान उसे उसके व्यास से मोड़कर लगाया जा सकता है। क्या हम कह सकते हैं कि रंगीन क्षेत्र का क्षेत्रफल वृत्त के क्षेत्रफल का आधा होगा?

अत: अर्द्धवृत्त का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\pi r^2$

अर्द्धवृत्त की परिमिति क्या होगी?

9.7 वृत्ताकार रास्ते या वलय का क्षेत्रफल



एक पार्क में एक वृत्ताकार रास्ता चित्र में दिखाए अनुसार बना है। इसमें बाहरी और भीतरी वृत्त समकेंद्रीय हैं। आइए, इस वृत्ताकार रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

इस वृत्ताकार रास्ते का क्षेत्रफल बाहरी और भीतरी वृत्त के क्षेत्रफल का अंतर होगा।

यदि हम कहते हैं कि बाहरी वृत्त की त्रिज्या 'R' और भीतरी वृत्त की त्रिज्या 'r' है।

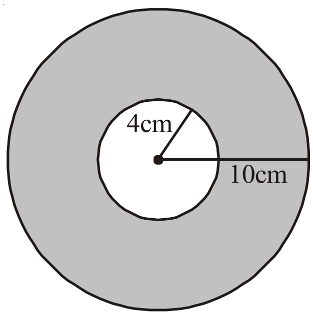
वृत्ताकार रास्ते का क्षेत्रफल = बाहरी वृत्त का क्षेत्रफल – भीतरी वृत्त का क्षेत्रफल

$$= \pi R^2 - \pi r^2 = \pi (R^2 - r^2)$$

अत:

वृत्ताकार रास्ते या रिंग का क्षेत्रफल = $\pi (R^2 - r^2)$ या $\pi (R + r)(R - r)$
जहाँ R, r क्रमशः बाहरी और भीतरी वृत्त की त्रिज्या हैं।

उदाहरण13 : संलग्न चित्र देखिए। यह दो समकेंद्रीय वृत्तों को दर्शाता है। बड़े वृत्त की त्रिज्या 10सेमी और छोटे वृत्त की त्रिज्या 4सेमी है।



ज्ञात कीजिए। (i) बड़े वृत्त का क्षेत्रफल

(ii) छोटे वृत्त का क्षेत्रफल

(iii) दोनों वृत्तों के बीच के छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ($\pi = 3.14$)

हल : (i) बड़े वृत्त की त्रिज्या = 10 सेमी

अतः बड़े वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

= 3.14 × 10 × 10 = 314 वर्ग सेमी

(ii) छोटे वृत्त की त्रिज्या = 4 सेमी

अतः छोटे वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

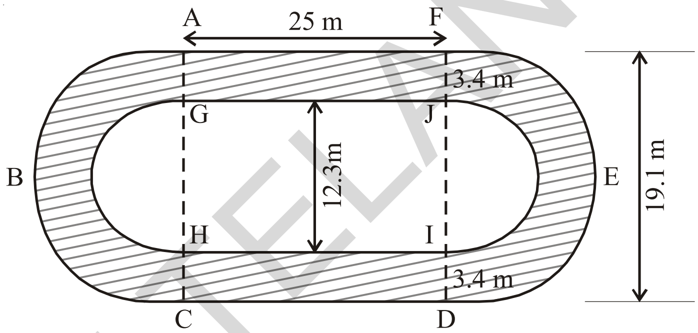
= 3.14 × 4 × 4 = 50.24 वर्ग सेमी

(iii) छायांकित भाग का क्षेत्रफल = बड़े वृत्त का क्षेत्रफल – छोटे वृत्त का क्षेत्रफल

= (314 – 50.24) वर्ग सेमी

= 263.76 वर्ग सेमी

उदाहरण 14: नीचे दी गई आकृति के छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल : छायांकित क्षेत्र = आयत AGJF का क्षेत्रफल + आयत HCDI का क्षेत्रफल + अर्द्धवृत्ताकार वलय का क्षेत्रफल ABCHG + अर्द्धवृत्ताकार वलय का क्षेत्रफल DEFJI

आयत AGJF का क्षेत्रफल = 25 × 3.4 = 85 वर्ग मी

आयत HCDI का क्षेत्रफल = 25 3.4 = 85 वर्ग मी

वलय ABCHG का क्षेत्रफल = $\frac{\pi}{2}[(R^2 - r^2)]$ = × $\frac{1}{2}[(9.55)^2 - (6.15)^2]$

वलय DEFJI का क्षेत्रफल = $[(R^2 - r^2)]$ = $\frac{22}{7} \times \frac{1}{2}[(9.55)^2 - (6.15)^2]$

$= (25 \quad 3.4) + (25 \times 3.4) + \quad \pi[(9.55)^2 - (6.15)^2] + \frac{1}{2}\pi[(9.55)^2 - (6.15)^2]$

$= [85 + 85 + \frac{22}{7} \times 15.7 \times 3.4]$ वर्ग मी

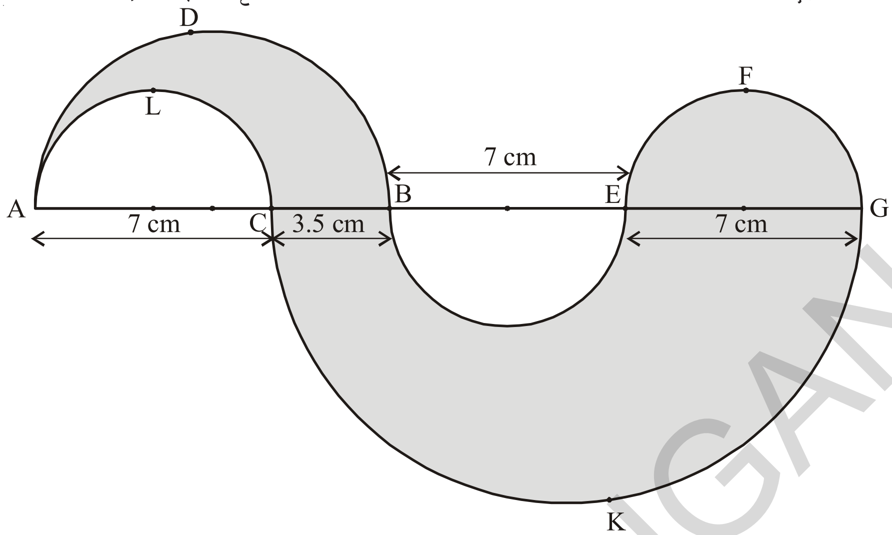
= (170 + 167.77) वर्ग मी

= 337.77 वर्ग मी

$R = \frac{19.1}{2} = 9.55$

$r = \frac{12.3}{2} = 6.15$

उदाहरण 15: नीचे दी गई आकृति के छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल : छायांकित क्षेत्र = ADBCLA का क्षेत्रफल + EFGE का क्षेत्रफल + BEGKCB का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}\times\pi\left[\left(\frac{10.5}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left[\left(\frac{17.5}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2\right] \text{cm}^2$$

$$= \left(\frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times\frac{35}{4}\times\frac{7}{4}\right) + \left(\frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times\frac{49}{4}\right) + \left(\frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times\frac{21}{4}\times\frac{49}{4}\right) \text{ वर्ग सेमी}$$

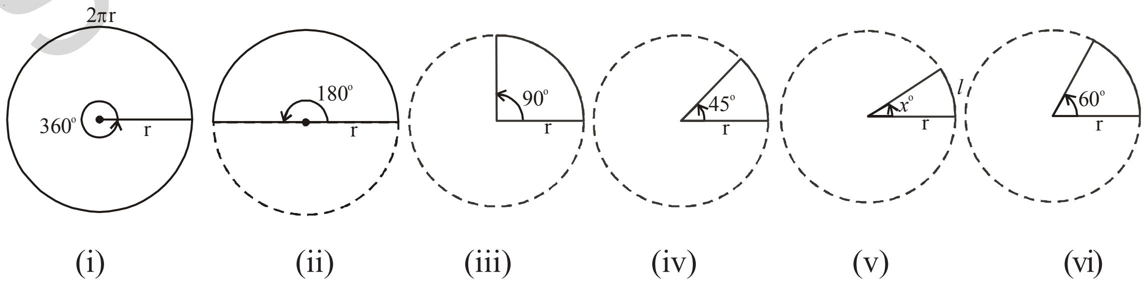
$$= \left(\frac{385}{16}+\frac{77}{4}+\frac{1617}{16}\right) \text{ वर्ग सेमी}$$

$$= \left(\frac{2310}{16}\right) \text{ वर्ग सेमी}$$

$= 144.375$ वर्ग सेमी

9.8 चाप की लंबाई (Length of the arc)

नीचे दिए गए वृत्त देखिए और तालिका पूर्ण कीजिए।



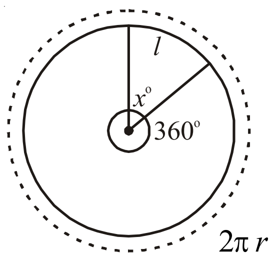
चित्र	कोण	चाप की लंबाई	चाप के कोण और लंबाई में संबंध
(i)	360^0	$2\pi r$	$\frac{360^0}{360^0} \times 2\pi r = 2\pi r$
(ii)	180^0	πr	$\frac{180^0}{360^0} \times 2\pi r = \pi r$
(iii)	90^0	$\frac{\pi r}{2}$	________
(iv)	45^0	$\frac{\pi r}{4}$	________
(v)	x^o	l	$\frac{x^0}{360^0} \times 2\pi r = l$
(vi)	60^0	$\frac{\pi r}{3}$	________

ऊपर वृत्तखंड के चाप की लंबाई $(l) = \frac{x^\circ}{360^\circ} \times 2\pi r$ दी गई है, जहाँ 'r' वृत्त की त्रिज्या और 'x' वृत्त खंड के चाप द्वारा वृत्त के केंद्र पर बना कोण है।

यदि वृत्तखंड के चाप की लंबाई l हो

$$\frac{2\pi r}{l} = \frac{360^0}{x^0}$$

तो
$$l = \frac{x^\circ}{360^\circ} \times 2\pi r$$



9.9 वृत्त खंड का क्षेत्रफल (Area of Sector)

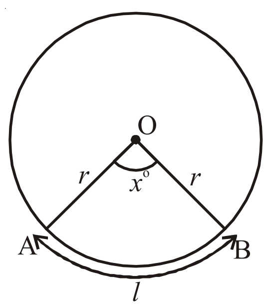
हम जानते हैं कि वृत्त की दो त्रिज्याओं और एक चाप से घिरे भाग को वृत्तखंड कहते हैं।

वृत्त का क्षेत्रफल यदि उसकी त्रिज्या r हो $= \pi r^2$

वृत्त खंड का कोण जो वृत्त के केंद्र से चाप की ओर दोनों त्रिज्या रेखाओं के बीच में बना हो वह यदि x^0 हो

वृत्त खंड का क्षेत्रफल और वह कोण जो इसके सीधा समानुपाती है

$\therefore$ वृत्त खंड का क्षेत्रफल : वृत्त का क्षेत्रफल $= x^0 : 360^0$



वृत्त खंड OAB का क्षेत्रफल $= \frac{x^\circ}{360^\circ} \times$ वृत्त का क्षेत्रफल

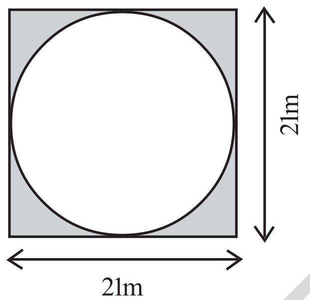
अतः वृत्त खंड OAB का क्षेत्रफल = $\frac{x^o}{360^o} \times \pi r^2$ $[\pi r^2 = \pi r \times \frac{2r}{2}]$

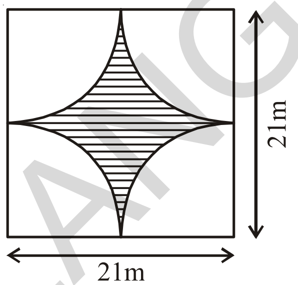
$$= \frac{x^o}{360^o} \times 2\pi r \times \frac{r}{2}$$

$$= l \times \frac{r}{2}$$

$$A = \frac{lr}{2}$$ (l चाप की लंबाई)

उदाहरण 13: नीचे दी गई प्रत्येक आकृति के छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।





हल : **(i)** छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल

= {21मी. भुजा वाले वर्ग का क्षेत्रफल} – {21मी. व्यास वाले वृत्त का क्षेत्रफल}

यदि वृत्त का व्यास 21मी. है।

तो वृत्त की त्रिज्या = $\frac{21}{2}$ =10.5मी.

छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल = = $(21 \times 21) - \left(\frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2}\right)$ वर्ग मी.

= 441 – 346.5

= 94.5 वर्ग मी.

(ii) छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल = {21मी. भुजा वाले वर्ग का क्षेत्रफल} – {4×वृत्त खंड का क्षेत्रफल}

$$= (21 \quad 21) - \left(4 \times \frac{90^o}{360^o} \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2}\right) \text{ वर्ग मी.}$$

(यदि व्यास 21मी, तो त्रिज्या $\frac{21}{2}$ मी)

$$= (21 \times 21) - \left(4 \times \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2}\right)$$

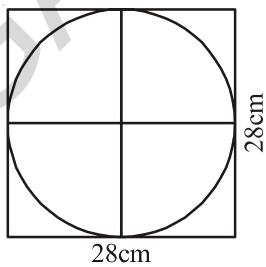
$= (441 - 346.5)$ वर्ग मी.

$= 94.5$ वर्ग मी.

अभ्यास - 9.2

1. एक अक्रेलिक शीट का एक आयताकार टुकड़ा जिसकी की लंबाई चौड़ाई क्रमशः 36 सेमी और 25 सेमी है। उसमें से 56 वृत्ताकार बटन काटे गये, जिनमें प्रत्येक का व्यास 3.5 सेमी है। बचे हुए भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

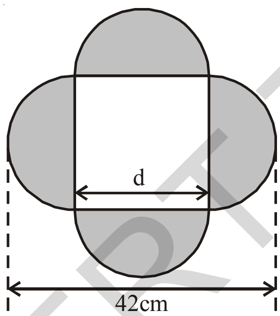
2. वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए यदि वह 28 सेमी वाले एक वर्ग की भुजाओं से बना हो।

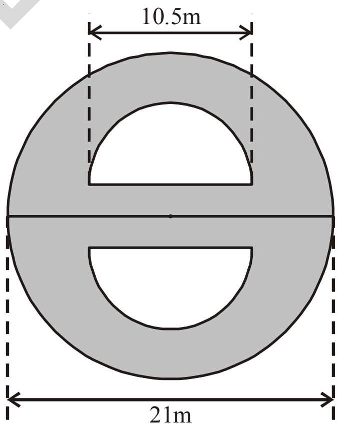


[**संकेतः** वृत्त का व्यास वर्ग की भुजा के बराबर होता है।]

3. प्रत्येक आकृति के छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

$\frac{d}{2}$



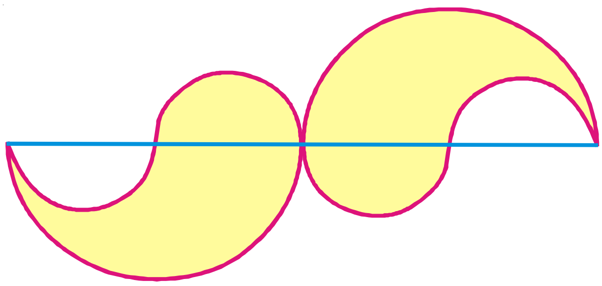


[**संकेतः** $d + \quad + \frac{d}{2} = 42$]

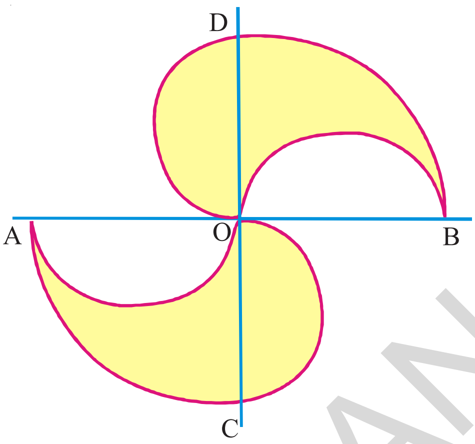
$d = 21$

$\therefore$ वर्ग की भुजा 21 सेमी

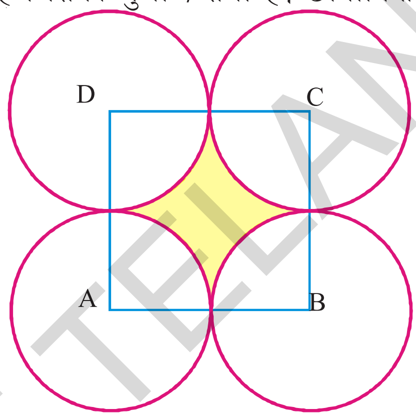
4. संलग्न चित्र में चार अर्द्धवृत्त हैं जिनकी त्रिज्या समान है और दो बड़े अर्द्धवृत्त हैं जिनकी त्रिज्या समान (42सेमी) है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



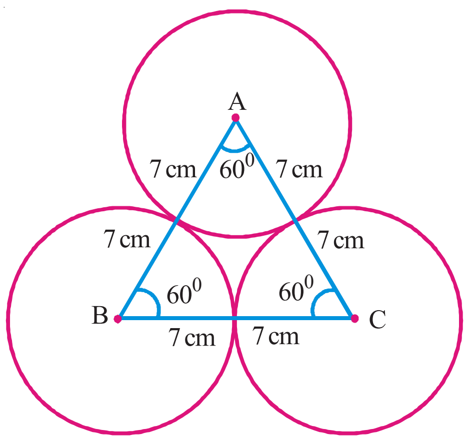
5. संलग्न चित्र में चार अर्द्धवृत्त हैं और एक चौथाई वृत्त हैं। यदि OA = OB = OC = OD = 14 सेमी. तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



6. संलग्न चित्र A, B, C और D चार समान वृत्तों के केंद्र हैं जो आपस में एक-दूसरे को स्पर्श करते हैं और ABCD एक वर्ग है जिसकी भुजा 7 सेमी है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



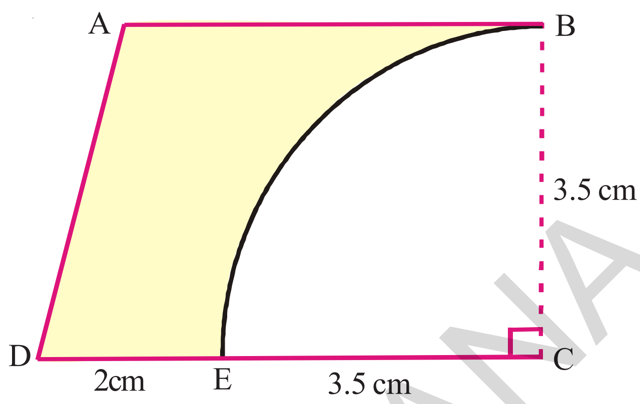
7. एक समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल 49 वर्ग सेमी है। त्रिभुज की प्रत्येक भुजा के केंद्र से गुजारते हुए चित्र में दिखाए अनुसार तीन समान त्रिज्या वाले वृत्त बनाए गए। तो त्रिभुज के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो वृत्तों में नहीं है।



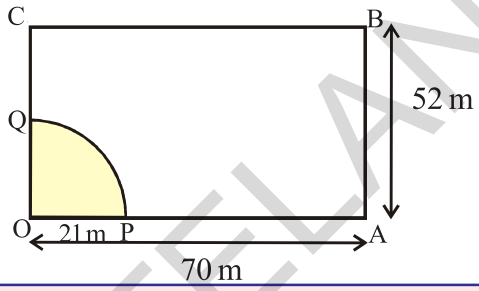
8. (i) चार समान वृत्त जिनकी त्रिज्या 'a' है एक दूसरे को स्पर्श करते हैं। उनके बीच के क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(ii) चार समान वृत्तों को एक वर्ग के कोनों को केंद्र रखते हुए इस प्रकार बनाया गया कि प्रत्येक वृत्त दो वृत्तों को स्पर्श करे। वर्ग के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो वृत्तों की परिधि में नहीं है यदि वर्ग की भुजा 14 सेमी मापी गई हो।

9. एक गत्ते का टुकड़ा समलंब ABCD के रूप में है, और AB||CD और $\angle BCD = 90^0$, यदि एक-चौथाई वृत्त निकाल दिया जाए। दिया गया है AB = BC = 3.5 सेमी और DE = 2 सेमी। गत्ते के बचे हुए भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (π $\frac{22}{7}$ लें।)



10. एक आयताकार मैदान की लंबाई-चौड़ाई क्रमशः 70 मी और 52 मी है। उसके एक कोने से 21मी रस्सी में बाँध कर एक घोड़े को चरने के लिए छोड़ा गया है। घोड़ा कितने क्षेत्रफल में घास चर सकता है?



हमने क्या सीखा?

समलंब का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (समांतर भुजाओं की लंबाइयों का योग) × (समांतर भुजाओं के बीच की दूरी)

- सामान्य चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × कर्ण की लंबाई × कर्ण पर आधारित बचे हुए दोनों शीर्षों पर लंबवत रेखाओं की लंबाई का योग)
- समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = कर्णों के गुणनफल का आधा
- वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2 जहाँ 'r' वृत्त की त्रिज्या है।
- वृत्ताकार रास्ते का क्षेत्रफल या वलय का क्षेत्रफल = $\pi(R^2 - r^2)$ or $\pi(R + r)(R - r)$ जहाँ R, r क्रमशः बाहरी और भीतरी वृत्तों की त्रिज्या हैं।
- वृत्त खंड का क्षेत्रफल = $\frac{x^0}{360^0} \times \pi r^2$ जहाँ x° वृत्त की दो त्रिज्याओं के मध्य चाप की ओर बना हुआ कोण है और r वृत्त की त्रिज्या है।

$$A = \frac{lr}{2}$$

अध्याय **10**

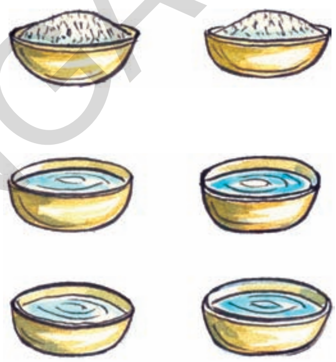
सीधा एवं व्युत्क्रम समानुपात
(DIRECT AND INDIRECT PROPORTION)

10.0 परिचय

चलिए अब दी गई स्थितियों का अवलोकन करेंगे।

2 कप चावल पकाने के लिए गोपी 4 कप पानी का उपयोग करता है। गोपी के घर मेहमान आने पर उसे आज 6 कप चावल पकाना है उसके लिए उसे कितने कप पानी की आवश्यकता होगी?

क्या आप उसकी सहायता करेंगे?



हमारे दैनंदिन जीवन में हम इसी प्रकार की कई स्थितियों का सामना करते हैं जहाँ एक राशि में परिवर्तन होने पर दूसरी राशि में परिवर्तन होता है। उदाहरणार्थ

(i) यदि आपके विद्यालय में विद्यार्थियों की संख्या में वृद्धि होती है तो आवश्यक मध्यान्ह भोजन की मात्रा क्या होगी? क्या अधिक मध्यान्ह भोजन की आवश्यकता हो?

(ii) यदि हम बैंक में अधिक रकम जमा करें तो उस पर प्राप्त ब्याज के बारे में आप क्या कह सकते हो? निःसंदेह प्राप्त ब्याज भी अधिक होगा।

(iii) यदि खरीदी गई वस्तुओं की संख्या कम की गई तो कुल व्यय (मूल्य) क्या होगा? स्पष्ट है कि कुल मूल्य भी कम होगा।

(iv) यदि 40 चाय पैकेट का भार 1.6 कि.ग्रा. हो तो 20 चाथ पैकेट का भार क्या होगा? साफ है कि 20 चाय पैकेट का भार कम होगा।

इन सभी उदाहरणों में, हम यह देखने हैं कि एक राशि में परिवर्तन से दूसरी राशि में परिवर्तन होता है।

यह कीजिए :

ऐसी ही और पाँच स्थितियाँ लिखिए जिनमें एक राशि में परिवर्तन से दूसरी राशि में परिवर्तन होता है।

गोपी द्वारा आवश्यक पानी की मात्रा की गणना हम कैसे ज्ञात कर सकते हैं? यह ज्ञात करने के लिए, हम कुछ भिन्न पद्धतियों को चर्चा करेंगे।

10.1 सीधा अनुपात

वन महोत्सव के उपलक्ष्य पर इको टीम के कप्तान ने वृक्षारोपण करवाने का निर्णय लिया। प्रत्येक कक्षा के इको क्लब के सदस्य की संख्या नीचे दी गई है।

कक्षा	VI	VII	VIII	IX	X
इको विद्यार्थियों की संख्या	5	7	10	12	15

प्रत्येक विद्यार्थी को दो पौधे लगाने हैं। प्रत्येक कक्षा द्वारा वृक्षारोपण के लिए आवश्यक पौधों की संख्या ज्ञात कीजिए।

कक्षा	VI	VII	VIII	IX	X
इको विद्यार्थियों की संख्या	5	7	10	12	15
आवश्यक पौधों की संख्या	10	14	20	24	30

आवश्यक पौधों की संख्या के बारे में आप क्या कह सकते हैं? विद्यार्थियों की संख्या एवं आवश्यक पौधों की संख्या में आप क्या परिवर्तन देखते हैं? या तो दोनों में वृद्धि होती है या दोनों में कमी।

$$\frac{\text{आवश्यक पौधों की संख्या}}{\text{छात्रों की संख्या}} = \frac{10}{5} = \frac{14}{7} = \frac{20}{10} = \ldots\ldots = \frac{2}{1} = 2$$ जो एक स्थिरांक है और अनुपात का स्थिरांक कहलाता है।

अनपात समान है अतः हम इस परिवर्तन को सीधा अनुपात कहते हैं यदि x और y कोई दो राशियों इस प्रकार हैं कि दोनों में वृद्धि या कमी एक साथ होती है और $\frac{x}{y}$ स्थिर रहता है (माना k), तब हम यह कह सकते हैं कि x तथा y सीधे अनुपात में हैं। इसे $x \propto y$ लिखते हैं और x सीधे अनुपात में है y को ऐसे पढ़ा जाता है।

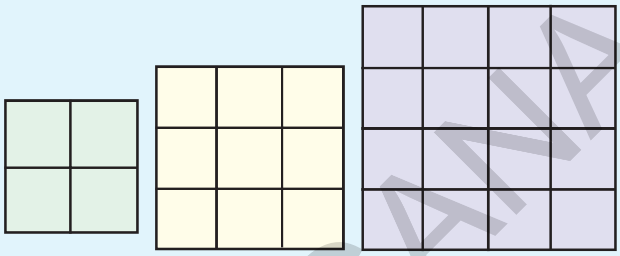
$\therefore \frac{x}{y} = \text{k} \Rightarrow x = ky$ जहाँ k अनुपातिकता स्थिराक है।

यदि y_1 और y_2 क्रमशः x_1 and x_2 से संबंधित y के मूल्य हैं तो $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$

यह कीजिए

1. तीन उदाहरण दीजिए जहाँ आप सीधा अनुपात देखते हैं।
2. माना 2, 3, 4 और 5 से.मी. भुजा वाले विभिन्न वर्ग हैं। इन वर्गों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए और निम्न तालिका भरीए।

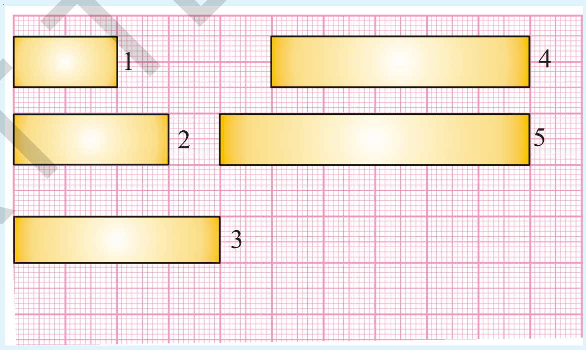
भुजा (से.मी.)	क्षेत्रफल (वर्ग से.मी.)
2	
3	
4	
5	



आप क्या देखते हैं? यदि भुजा में परिवर्तन होता है तो क्या आप क्षेत्रफल में परिवर्तन देखते हैं? दी गई भुजा के लिए वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। क्या यह अनुपात समान होगा ?

∴ यह परिवर्तन एक सीधा अनुपात नहीं है।

3. एक आलेख पर, समान चौड़ाई वाले आयत बनाए गए है। प्रत्येक आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कर तालिका पूर्ण करें।



आयत	1	2	3	4	5
लंबाई (से.मी.)					
क्षेत्रफल (वर्ग से.मी.)					

क्या क्षेत्रफल आयत की लंबाई के सीधे अनुपात में है?

4. एक आलेख पत्र लेकर उस पर समान लम्बाई एवं भिन्न चौड़ाई के आयत बनाइए। प्रत्येक का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। आप चौड़ाई एवं क्षेत्रफल के बारे में क्या निष्कर्ष निकालेंगे?

उदाहरण 1: समान आकार के 65 चाय पैकेट का मूल्य यदि रु. 2600 है तो ऐसे 75 चाय पैकेट का मूल्य क्या होगा?

हल : हमें ज्ञात है कि यदि चाय पैकेट की संख्या में वृद्धि होती है तो मूल्य भी बढ़ेगा। अतः चाय पैकेट का मूल्य उसकी संख्या के सीधा समानुपात में है।

चाय पैकेट की संख्या (x)	65	75
मूल्य (y)	2600	?

अतः $\dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{x_2}{y_2}$ यहाँ $x_1 = 65 \quad y_1 = 2600 \quad x_2 = 75 \quad y_2 = ?$

प्रतिस्थापित करने पर $\dfrac{65}{2600} = \dfrac{75}{y_2} \Rightarrow y_2 = \dfrac{75 \times 2600}{65} =$ रु.3000

अतः ऐसे 75 पैकेट का मूल्य रु.3000 है।

उदाहरण 2: एक रेलवे स्टेशन पर कार पार्किंग की दर निम्न है।

घण्टे (x)	दर (y)
चार घण्टे तक	₹ 60
आठ घण्टे तक	₹ 100
12 घण्टे तक	₹ 140
24 घण्टे तक	₹ 180

जाँच कीजिए कि पार्किंग की दर एवं पार्किंग समय सीधे अनुपात में हैं या नहीं।

हल : हम देख सकते हैं कि दोनों राशियों में धीरे-धीरे वृद्धि हो रही है।

क्या यह सीधे अनुपात में है? $\dfrac{x}{y}$ का मूल्य क्या है?

यदि यह स्थिर है, तो सीधा अनुपात है। यदि नहीं तो सीधे अनुपात में नहीं है। यहाँ जाँच करें।

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{60}, \frac{8}{100}, \frac{12}{140}, \frac{24}{180}$$

आप देख सकते हैं कि यह अनुपात समान नहीं हैं। अतः यह राशियों सीधे अनुपात में नहीं हैं।

उदाहरण 3: 8 मीटर ऊँचाई वाला एक खम्बो की परछाई 10 मी हैं तो समान परिस्थितियों ने 40 मी. लम्बाई वाली परछाई के वृक्ष की ऊँचाई ज्ञात कीजिये?

हल: खम्बे की ऊँचाई के साथ-साथ परछाई की लंबाई भी समानुपात में बदलती है।

अत: $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ यहाँ $x_1 = 8$ मी. $y_1 = 10$मी. $x_2 = ?$ और $y_2 = 40$मी.

प्रतिस्थापित करने पर $\frac{8}{10} = \frac{x_2}{40} \Rightarrow x_2 = \frac{8 \times 40}{10} = 32$ मीटर

अत: वृक्ष की ऊँचाई 32 मीटर है।

उदाहरण 4: 50 लीटर आयतन वाली एक टंकी को पाइप द्वारा भरने के लिए 5 घण्टे लगते हैं। तो 75 लीटर आयतन को भरने के लिए कितने समय की आवश्यकता होगी?

हल: टंकी में पानी का आयतन $\propto$ टंकी भरने के लिए आवश्यक समय

अत: $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ यहाँ $x_1 = 50\, l$ $y_1 = 5$ घण्टे $x_2 = 75\, l$ और $y_2 = ?$

$$\frac{50}{5} = \frac{75}{x} \Rightarrow x = \frac{75 \times 5}{50} = \frac{\cancel{375}^{15}}{\cancel{50}_{2}} = 7\frac{1}{2} \text{ घण्टे}$$

अत: 75 l आयतन की टंकी भरने के लिए आवश्यक समय है $7\frac{1}{2}$ घण्टे।

उदाहरण 5: यदि 20 मीटर कपड़े का मूल्य रु.1600 हैं तो 24.5 मीटर कपड़े का मूल्य क्या होगा?

हल : कपड़े का मूल्य उसकी लम्बाई के सीधे समानुपात में है। अत: $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ जहाँ $x_1 = 20$ मीटर

$y_1 =$ रु.1600, $x_2 = 24.5$ मीटर और $y_2 = ?$

प्रतिस्थापित करने पर $\frac{20}{1600} = \frac{24.5}{y_2} \Rightarrow y_2 = \frac{1600 \times 24.5}{20} =$ रु.1960

अत: 24.5 मी कपड़े का मूल्य रु.1960

यह कीजिए

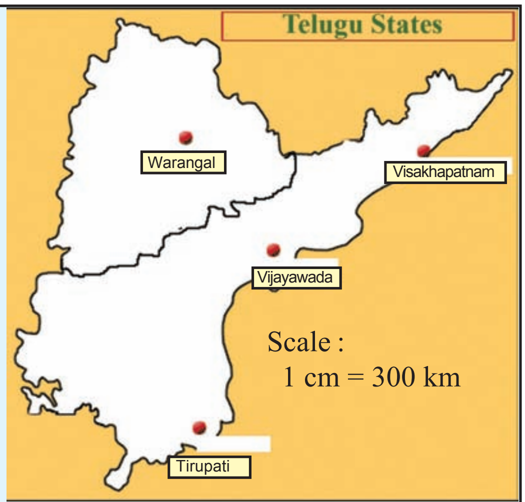
दिए गए मानचित्र में दूरी मापिए एवं उसके उपयोग से निम्न की सही दूरी ज्ञान कीजिए।

(i) विजयवाड़ा और विशाखपट्टणम

(ii) तिरुपति और वरंगल

जहाँ मानचित्र का पैमाना है।

1 से.मी.= 300 कि.मी. पैमाने को परिवर्तीत करने पर 1 से.मी. 1 : 30000000 प्राप्त होगा।



अभ्यास - 10.1

1. एक विशेष प्रकार के 5 मीटर कपड़े का मूल्य ₹ 210 है। तो उसी प्रकार के कपड़े का मूल्य ज्ञात कीजिए यदि लंबाई (i) 2 मी. (ii) 4 मी. (iii) 10 मी.(iv) 13 मी है।
2. तालिका पूर्ण कीजिए।

सेबों की संख्या	1	4	7	12	20
सेबों का मूल्य (₹)	8	....	....	....	....

3. 48 थैले धान का मूल्य ₹ 16,800 है तो 36 थैले धान का मूल्य ज्ञात कीजिए।
4. 4 सदस्यों वाले परिवार का मासिक खर्च ₹ 2,800 है तो 3 सदस्यों वाले परिवार का मासिक व्यय ज्ञात कीजिए।
5. 28 मी. लंबी जहाज के मस्तूल की ऊँचाई 12 मी. है। यदि इसी प्रकार के मस्तूल की ऊँचाई 9 मी. हो तो जहाज की लंबाई ज्ञात कीजिए।
6. एक 5 मी 60 से.मी. ऊँचाई वाले ऊर्ध्व खम्बे की परछाई 3मी 20 से.मी. है। उसी समय
   (i) 10 मी 50 से.मी. ऊँचाई वाले अन्य खम्बे द्वारा बनी परछाई की लम्बाई।
   (ii) खम्बे की ऊँचाई जिसकी छाया 5 मी. लम्बी है ज्ञात कीजिए।
7. एक सामान से भरा ट्रक 25 मिनट में 14 कि.मी. दूरी तय करता है। यदि वेग अपरिवर्तित रहे तो 5 घण्टे में वह कितनी दूरी तय करेगा?
8. मोटे कागज़ के 12 पन्नों का भार 40 ग्राम है तो उसी प्रकार के कितने पन्नों का भार $16\frac{2}{3}$ किलोग्राम होगा?
9. एक रेलगाड़ी 75 कि.मी/घण्टे के समवेग से गति कर रही है।
   (i) 20 में रेलगाड़ी द्वारा तय की गई दूरी क्या होगी?
   (ii) 250 कि.मी. की दूरी तय करने में लगा समय ज्ञात कीजिए।
10. एक माइक्रोचिप के नक्शे का पैमाना 40:1 है। नक्शे की लंबाई 18 से.मी. है तो माइक्रोचिप की सही लम्बाई ज्ञात कीजिए।

परियोजना कार्य

1. भारत का मानचित्र लीजिए। उपर्युक्त नोट कीजिए। किन्हीं दो शहरों के मध्य मानचित्र दूरी पैमाने की सहायता से ज्ञात कीजिए। उनके मध्य सही दूरी की गणना कीजिए।
2. 5 व्यक्तियों के लिए हलवा बनाने के लिए आवश्यक सामग्री निम्न है: रवा (या) सूजी = 250 ग्राम, शक्कर = 300 ग्राम, घी = 200 ग्राम, पानी = 500 मि.ली.
   अनुपात की धारणा का उपयोग कर आपकी कक्षा के लिए हलवा बनाने में आवश्यक सामग्री की मात्रा में होने वाले परिवर्तन का अनुमान लगाइए।

10.2 व्युत्क्रम अनुपात (Inverse Proportion) :

एक पार्सल कम्पनी के पास पहुँचाने के लिए कुछ पार्सल हैं। यदि कम्पनी 36 व्यक्तियों को इस कार्य के लिए रखती हैं तो 12 दिनों का समय लगता है। यदि केवल 18 व्यक्ति हैं तो 24 दिनों में यह कार्य पूरा होगा। आप देख सकते हैं कि यदि व्यक्तियों की संख्या आधी हो तो समय दुगुना लगता है। यदि कम्पनी 72 व्यक्तियों को रखती है तो क्या समय आधा होगा?

हाँ, निश्चित ही। निम्न तालिका को देखें।

व्यक्तियों की संख्या	36	18	9	72	108
समय	12	24	48	6	4

एक ही दिन में पार्सल पहुँचाने के लिए एक कम्पनी को कितने व्यक्तियों को रखना चाहिए?

यदि एक राशि बढ़ती हैं तो दूसरी राशि में उसी अनुपात में कमी होती है और विपरीत इसे व्युत्क्रम अनुपात कहते हैं। उक्त उदाहरण में, कार्यरत व्यक्तियों की संख्या और दिनों की संख्या एक दूसरे के व्युत्क्रम अनुपात में है।

सांकेतिक रूप में

$$\text{आवश्यक दिनों की संख्या} \propto \frac{1}{\text{काम पर लगाये गये लोगों की संख्या}}$$

यदि x और y व्युत्क्रम अनुपात में है तो $x \propto \frac{1}{y}$

$x = \frac{k}{y}$ जहाँ k आनुपातिकता स्थिरांक है।

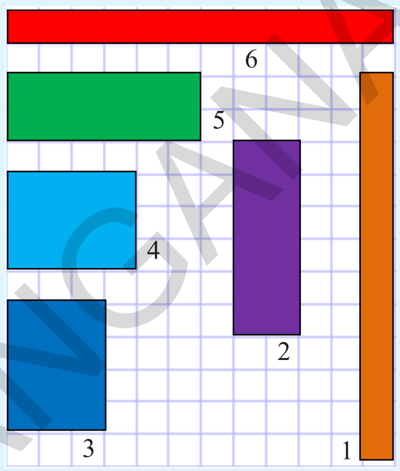
$xy = \text{k}$.

यदि y_1 और y_2 क्रमशः x_1 और x_2 के संगत y के मूल्य हैं तो $x_1y_1 = x_2y_2$ (= k), या $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$.

यह कीजिए

1. दैनिक जीवन की किन्ही तीन परिस्थितियाँ को लिखिए जहाँ आप व्युत्क्रम अनुपात देखते हैं।
2. एक वर्गाकर कागज पर भिन्न-भिन्न परिमाण वाले आयत 12 संलग्न वर्ग उपयोग कर बनाने हैं। बनाने वाले प्रत्येक आयत की लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए। निम्न सारिणी में मूल्य नोट करें।

आयत क्रमांक	लम्बाई (से.मी.)	चौड़ाई (से.मी.)	क्षेत्रफल (वर्ग से.मी.)
1	L1……	B1……	……....
2	L2……	B2……	……....
3	L3……	B3……	……....
4	L4……	B4……	……....
5	L5……	B5……	……....
6	L6……	B6……	……....



आप क्या देखते हैं? जैसे-जैसे लम्बाई में वृद्धि होती है, चौड़ाई घटती है और व्युत्क्रम (क्षेत्रफल स्थिर है)।

क्या लम्बाई और चौड़ाई एक दूसरे के व्युत्क्रम अनुपात में हैं?

उदाहरण 6: यदि 36 मजदूर एक दीवार 12 दिनों में बना सकते हैं तो 16 मजदूरों द्वारा उसी दीवार को बनाने में कितना समय लगेगा?

हल : यदि मजदूरों की संख्या घटती है, तो दीवार बनाने में लगे समय में उसी अनुपात में वृद्धि होगी।

स्पष्ट रूप से मज़दूरों की संख्या दिनों की संख्या के व्युत्क्रम अनुपात में है।

अत: यहाँ $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ जहाँ $x_1 = 36$ मजदूर

$y_1 = 12$ दिन $x_2 = 16$ मजदूर $y_2 = ?$ दिन

मज़दूरों की संख्या	दिनों की संख्या
↓ 36	12 ↑
16	y_2

प्रतिस्थापित करने पर, $\frac{36}{16} = \frac{y_2}{12} \Rightarrow y_2 = \frac{12 \times 36}{16} = 27$ दिन

क्यूंकि मज़दूरों की संख्या कम हो रही है $36 \div x = 16 \Rightarrow x = \frac{36}{16}$

अत: दिनों की संख्या उसी अनुपात में बढ़ेगी ।

अर्थात् $x \times 12 = \frac{36}{16} \times 12$

$= 27$ दिन

अत: 16 मज़दूरों द्वारा उसी दीवार को बनाने में 27 दिन लगेंगे।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए।

क्या हम कह सकते हैं कि प्रत्येक परिवर्तन एक अनुपात है?

एक पुस्तक में 100 पृष्ठ हैं। पुस्तक में पढ़े हुए पृष्ठों की संख्या और शेष रह गए पृष्ठों की संख्या में क्या अंतर है?

पढ़े हुए पृष्ठों की संख्या	(x)10	20	30	50	70
शेष पृष्ठ (y)	90	80	70	50	30

(यहाँ पर तब शेष पन्नों की संख्या क्या रह जाती है) (जब पढ़े हुए पृष्ठों की संख्या बढ़ती है)? क्या इसमें व्युत्क्रम है? समझाइए।

अभ्यास - 10.2

1. निम्न तालिका का निरीक्षण कीजिए और ज्ञात कीजिए कि कौन-से चर युग्म (यहाँ x और y) व्युत्क्रम अनुपात में हैं।

(i)

x	50	40	30	20
y	5	6	7	8

(ii)

x	100	200	300	400
y	60	30	20	15

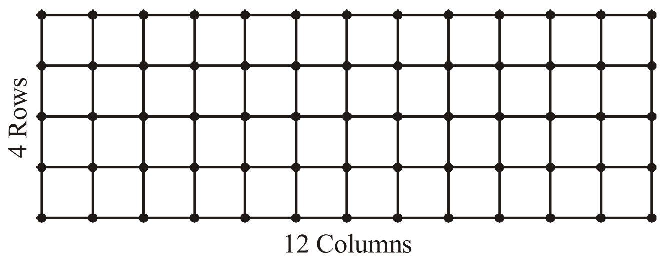
(iii)

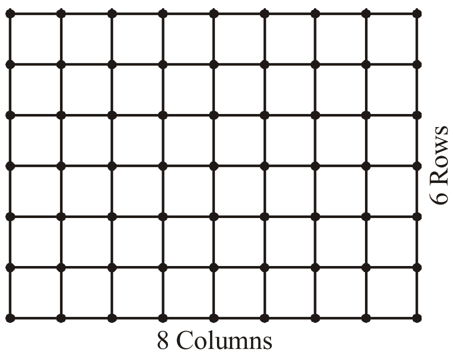
x	90	60	45	30	20	5
y	10	15	20	25	30	25

2. एक विद्यालय पुस्तकें खरीदने के लिए ₹ 6000 खर्च करना चाहता है। दिए गए दत्तों का उपयोग कर निम्न सारिणी भरिए।

प्रत्येक पुस्तक का मूल्य (रु.)	40	50		75	
पुस्तकों की संख्या (खरीदी जानेवाली)	150		100		75

3. एक वर्गाकार कागज़ लेकर उस पर नीचे दिए अनुसार 48 वर्गों को अलग-अलग पंक्तियों में व्यवस्थित कीजिए।





पंक्तियों की संख्या (R)	2	3	4	6	8
स्तंभों की संख्या (C)	---	---	12	8	---

आप क्या देखते हैं? जैसे-जैसे R में वृद्धि होती है, C घटता है।

(i) क्या $R_1 : R_2 = C_2 : C_1$?

(ii) क्या $R_3 : R_4 = C_4 : C_3$?

(iii) क्या R और C एक दूसरे से व्युत्क्रम अनुपात में है?

(iv) यह प्रयोग 36 वर्गों के साथ कीजिए।

कक्षा परियोजना

आपकी कक्षा में एक सप्ताह तक उपस्थित एवं अनुपस्थित छात्रों की संख्या की तालिका बनाइए। आपके मित्रों के साथ चर्चा कीजिए और निरीक्षणों को आपकी नोट बुक में लिखिए।

सप्ताह का दिन	उपस्थित छात्रों की संख्या (x)	अनुपस्थित छात्रों की संख्या (y)	$x.y$
सोमवार			
मंगलवार			
बुधवार			
गुरुवार			
शुक्रवार			
शनिवार			

चलिए कुछ उदाहरण हल करें।

उदाहरण 7: एक छात्रावास में 100 विद्यार्थियों का 40 दिनों के लिए राशन उपलब्ध है। यदि चार दिनों के पश्चात और 20 विद्यार्थी प्रवेश लेते हैं तो वह कितने दिनों तक चलेगा?

हल : विद्यार्थियों की संख्या में वृद्धि होने पर उसी अनुपात में राशन कम दिनों तक चलेगा। अतः यह व्युत्क्रम अनुपात में है।

	राशन उपलब्धि के दिनों की संख्या	विद्यार्थियों की संख्या
	40	100
चार दिनों पश्चात	36 ↓	↑ 100
	x	120

अब प्रश्न यह है कि यदि 100 विद्यार्थियों का 36 दिनों के लिए राशन उपलब्ध है तो 120 विद्यार्थियों के लिए कितने दिन चलेगा?

$$\frac{36}{x} = \frac{120}{100}$$

$$x = \frac{\cancel{36}^{3} \times 10\cancel{0}}{\cancel{12}\cancel{0}} = 30\ days$$

चूंकि विद्यार्थियों की संख्या में वृद्धि हो रही है $100 \times x = 120 \Rightarrow x = \frac{120}{100}$ उसी अनुपात में दिनों की संख्या में कमी होगी अर्थात् $36 \div x$ $= 36 \div \frac{120}{100}$ $\Rightarrow 36 \times \frac{100}{120} = 30$ days

उदाहरण 8: 60 कि.मी./घण्टे की गति से एक कार अपनी मंजिल तक पहुँचने में 4 घण्टे का समय लेती है। यदि वह कार 80 कि.मी./घण्टे की गति से गमन करती है तो उसे कितना समय लगेगा?

हल : गति बढ़ने पर लगे समय में समान अनुपात में कमी होती है। अतः समय और कार की गति व्युत्क्रम अनुपात में हैं। (समान दूरी के लिए)

विधि 1

गति	समय
60	4
80	x

$$\frac{60}{80} = \frac{x}{4}$$

$$60 \times 4 = 80 \times x$$

$$x = \frac{60 \times 4}{80} = 3 \text{ hr.}$$

(या)

विधि II

गति	समय
60	4
80	y

$x \times$ $\div x$

$$60 \times x = 80 \quad \text{and} \quad 4 \div x = y$$

$$x = \frac{80}{60}$$

$$4 \div \frac{80}{60} = y$$

$$y = \frac{4 \times 60}{80} = 3\ hr.$$

उदाहरण 9: 1 टंकी को 1 घण्टा 20 मिनट में भरने के लिए 6 पम्पों की आवश्यकता है। इसी प्रकार के 5 पम्पों की सहायता से टंकी भरने में कितने समय की आवश्यकता होगी?

हल : माना टंकी भरने के लिए आवश्यक समय = x मिनट इस प्रकार, निम्न तालिका प्राप्त होती है।

पम्पों की संख्या	6	5
समय (मिनट)	80	x

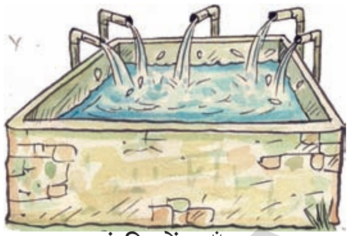
जितनी कम पम्पों की संख्या उतना ही अधिक समय टंकी को भरने में लगेगा। तो यह व्युत्क्रम अनुपात का एक उदाहरण है।

अतः $80 \times 6 = x \times 5$ $[x_1 y_1 = x_2 y_2]$

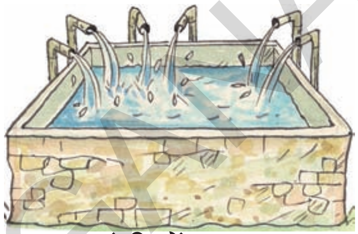
(या) $\frac{80 \times 6}{5} = x$

(या) $x = 96$ मिनट

इस प्रकार 5 पम्पों की सहायता से टंकी भरने में लगा समय 96 मिनट या 1 घण्टा 36 मिनट है।



एक टंकी में पाँच पाइप



एक टंकी में छः पाइप

अभ्यास - 10.3

1. ₹ 8 प्रति किलोग्राम की दर से 5 किलो आलू खरीदने के लिए सिरी के पास रकम है। यदि आलू का मूल्य ₹10 प्रति किलो हो जाए तो उसी रकम में वह कितने आलू खरीद सकती है?

2. 500 व्यक्तियों के लिए 70 दिनों के भोजन की व्यवस्था एक कैम्प में है। यदि और 200 व्यक्ति कैम्प में शामिल होते हैं तो कितने दिनों तक की भोजन की व्यवस्था हो सकती है?

3. 36 लोग एक काम को 12 दिनों में पूरा करते हैं तो 9 व्यक्ति उसी काम को कितने दिनों में पूरा करेंगे?

4. एक साइकिल चालक 28 कि.मी. की दूरी 2 घण्टों में तय करता है तो उसके द्वारा 56 कि.मी. की दूरी तय करने में लगा समय ज्ञात कीजिए।

5. एक जहाज द्वारा 10 घण्टों में एक निश्चित दूरी 16 मील प्रति घण्टे की गति से तय की जाती है। उसकी गति में कितनी वृद्धि करनी चाहिए कि उसी दूरी को तय करने में उसे केवल 8 घण्टे का समय लगे? (एक नौचालन मील समुद्री दूरी मापने की इकाई है)

6. एक टंकी को $1\frac{1}{2}$ घण्टे में पूरा भरने के लिए पाँच पम्पों की आवश्यकता है। टंकी को आधे घण्टे में भरने के लिए उसी प्रकार के कितने पम्पों की आवश्यकता होगी?

7. यदि 15 आदमी एक दीवार को 48 घण्टों में बाँध सकते हैं तो उसी काम को 30 घण्टों में पूरा करने के लिए कितने लोगों की जरूरत पड़ेगी?

8. एक विद्यालय में प्रतिदिन 45 मिनट अवधि के 8 कालांश होते हैं। यदि विद्यालय में 6 कालांश प्रतिदिन कर दिये जायें तो प्रत्येक कालांश की अवधि क्या हो जाएगी? (माना कि विद्यालय का समय समान है)

9. यदि z, x के समानुपात एवं y के व्युत्क्रम अनुपात में परिवर्तिन होता है तो Z में होने वाली प्रतिशत वृद्धि ज्ञात कीजिए। यदि x में 12% वृद्धि और y में 20% कमी हो।

10. यदि $x+1$ आदमी एक काम को $x+1$ दिनों में पूरा करते हैं तो $(x+2)$ आदमी उसी काम में कितने दिनों में पूरा करेंगे?

11. 24 मीटर की निश्चित परिमिति के दिए गए आयत में यदि लंम्बाई 1 मी. से बढ़ाई जाए तो चौड़ाई और क्षेत्रफल में संगत परिवर्तन होगा। लंबाई के साथ चौड़ाई एवं क्षेत्रफल में होने वाली परिवर्तन अवलोकनार्थ निम्न तालिका का उपयोग कीजिए।
आप क्या देखते है? अपना निरीक्षण आपकी कॉपी में लिखिए।

लंबाई (से.मी.)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
चौड़ाई (से.मी.)	11	10	....	....	....	....	....	......	.....
क्षेत्रफल (वर्ग से.मी.)	11	20	....	....	....	....	....	......	......

10.3 गुणित समानुपात (Compound Proportion) :

कभी-कभी किसी समानुपात की राशि में परिवर्तन अन्य दो या अधिक राशियों के परिवर्तन पर निर्भर करता है।

तब हम प्रथम राशि के समानुपात को अन्य दो राशियों के गुणित समानुपात के बराबर कर सकते हैं।

(i) एक राशि अन्य दो राशियों के साथ सीधे समानुपात में हो सकती है।

(ii) एक राशी दूसरी राशियों से व्युत्क्रम समानुपात में हो सकती है।

(iii) एक राशि दोनों राशियों में से एक के साथ सीधे समानुपात में और शेष से व्युत्क्रम समानुपात में हो सकती है।

उदाहरण 10: 35 विद्यार्थियों के 24 दिनों के मेस का खर्च ₹ 6300 होता है। बताओ कि 25 विद्यार्थियों का 18 दिनों के लिए मेस का खर्च क्या होगा?

हल : यहाँ तीन राशियाँ हैं अर्थात् मेस खर्च, विद्यार्थियों की संख्या और दिनों की संख्या।

मेस खर्च रु.	विद्यार्थियों की संख्या	दिनों की संख्या
6300	35	24
? (x)	25	18
$6300 : x$	$35:25 = 7:5$	$24:18 = 4:3$

विद्यार्थियों की संख्या और मेस के खर्च सीधे समानुपात में है।

मेस खर्च $\propto$ विद्यार्थियों की संख्या

$6300 : x = 7:5$

मेस खर्च दिनों की संख्या के साथ व्युत्क्रम अनुपात में है।

मेस खर्च $\propto$ दिनों की संख्या

$6300 : x = 4 : 3$

मेस खर्च दोनों राशियों पर निर्भर करता है अर्थात् विद्यार्थियों की संख्या और दिनों की संख्या। अतः हम इन दो राशियों का गुणित समानुपात लेंगे।

मेस खर्च $\propto$ विद्यार्थियों की संख्या का अनुपात और दिनों की संख्या के अनुपात का गुणित समानुपात।

$6300 : x =$ 7 : 5 का गुणित समानुपात और 4 : 3

$6300 : x = 7 \times 4 : 5 \times 3$

$6300 : x = 28 : 15$

मध्य राशियों का गुणनफल = अंत्य राशियों का गुणनफल

$28 \times x = 15 \times 6300$

$$x = \frac{15 \times 6300}{28}$$

$x =$ रु.3375.

अतः मेस खर्च होगा रु.3375.

उदाहरण 11: 24 लोग 6 घण्टे प्रतिदिन काम करके किसी काम को14 दिनों में पूरा करते हैं। यदि प्रत्येक व्यक्ति प्रतिदिन 7 घण्टे काम करेगा तो उसी काम को 8 दिनों में पूरा करने में कितने लोगों की आवश्यकता होगी?

हल : यहाँ तीन राशियाँ हैं - लोगों की संख्या, प्रतिदिन घण्टे, दिनों की संख्या।

लोगों की संख्या	**प्रतिदिन घण्टे**	**दिनों की संख्या**
24	6	14
? (x)	7	8
$24 : x$	6 : 7	14 : 8 = 7 : 4

लोगों की संख्या प्रतिदिन के घण्टों के व्युत्क्रम समानुपात में है।

$$\text{लोगों की संख्या} \propto \frac{1}{\text{दिन में घंटों की संख्या}}$$

$24 : x = 6 : 7$ का व्युत्क्रम अनुपात अर्थात् $7 : 6$

$\Rightarrow 24 : x$ सीधे समानुपात में है $7 : 6$ के

पुनः दिनों की संख्या लोगों की संख्या के व्युत्क्रम अनुपाती है।

$$\text{लोगों की संख्या} \propto \frac{1}{\text{दिनों की संख्या}}$$

$24 : x = 7 : 4$ का व्युत्क्रम अनुपात अर्थात् $4 : 7$

चूंकि लोगों की संख्या दो चर राशियों पर निर्भर करती है अर्थात् दिनों की संख्या और प्रतिदिन घण्टों की संख्या। अतः,

लोगों की संख्या $\propto$ प्रतिदिन घण्टों की संख्या का व्युत्क्रम समानुपात और दिनों की संख्या के व्युत्क्रम समानुपात का गुणित समानुपात

$24 : x = 7 : 6$ और $4 : 7$ का गुणित अनुपात

$24 : x = 7 \times 4 : 6 \times 7$

$24 : x = 4 : 6$

$24 : x = 2 : 3$

मध्य राशियों का गुणनफल = अन्य राशियों का गुणनफल

$2 \times x = 24 \times 3$

$x = 36$

वैकल्पिक विधि

$$\frac{24}{x} = \frac{7}{6} \times \frac{4}{7}$$

$$\frac{24}{x} = \frac{2}{3}$$

$$2 \times x = 24 \times 3$$

$$x = \frac{72}{2} = 36$$

अतः आवश्यक लोगों की संख्या = 36.

उदाहरण 12: 180 मी. लंबी दीवार को 12 पेंटर 3 दिनों में रंग देते हैं। तो 200 मी. लंबी दीवार को 5 दिनों में रंग ने के लिए कितने पेंटर की आवश्यकता होगी?

हल : पेंटर की संख्या दीवार की लंबाई के सीधे समानुपाती एवं दिनों की संख्या के व्युत्क्रम अनुपाती है।

पेंटर की संख्या	दीवार की लम्बाई (मी.)	दिनों की संख्या
12	180	3
x	200	5
$12 : x$	$180 : 200 = 9 : 10$	$3 : 5$

पेंटर की संख्या α दीवार की लम्बाई

$12 : x = 9 : 10$ ---- (1) और

$$\text{पेंटर की संख्या } \alpha \frac{1}{\text{दिन की संख्या}}$$

$12 : x = 3 : 5$ की व्युत्क्रम समानुपात

$12 : x = 5 : 3$ ---- (2)

(1) और (2) द्वारा

$12 : x \;=\; 9 : 10$ और $5 : 3$ का गुणित समानुपात

$12 : x \;=\; (9 : 10) \times (5 : 3)$

$12 : x \;=\; 9 \times 5 : 10 \times 3$

$12 : x \;=\; 45 : 30 = 3 : 2$

$12 : x = 3 : 2$ (अन्त्य राशियों का गुणनफल = मध्यराशियों का गुणनफल)

$3 \times x = 12 \times 2$

$$x = \frac{24}{3} = 8$$

पेंटर की आवश्यक संख्या $= 8$

वैकल्पिक विधि

$$\frac{12}{x} = \frac{9}{10} \times \frac{5}{3}$$

$$\frac{12}{x} = \frac{3}{2}$$

$$12 \times 2 = 3 \times x$$

$$x = \frac{\cancel{12}^{\,4} \times 2}{\cancel{3}} = 8$$

अभ्यास - 10.4

1. 8 सदस्यों का 20 दिनों के लिए चावल का मूल्य ₹ 480 है। 12 सदस्यों का 15 दिनों के लिए चावल का मूल्य क्या होगा?
2. 10 आदमी 75 कि.मी. लंबी सड़क 5 दिनों में बनाते हैं तो बताओ कि 15 आदमी 45 कि.मी. लम्बी सड़क कितने दिन में बनाएंगे?
3. 24 लोग 8 घण्टे प्रतिदिन काम करके-किसी काम को 15 दिनों में पूरा करते हैं। तो बताइए कि 20 लोग 9 घण्टे प्रतिदिन काम करके, उस काम को कितने दिनों में पूरा करेंगे?
4. 175 लोग 3150 मी. लम्बी नहर 36 दिनों में खोद सकते हैं तो 3900 मी. लम्बी नहर को 24 दिनों में खोदने के लिए कितने आदमी चाहिए?
5. 6 घण्टे प्रतिदिन टाइप करने पर 14 टाइपिस्ट 12 दिनों में किसी पुस्तक की हस्तलिपि पूरा करते हैं तो बताइए कि 4 टाइपिस्ट प्रतिदिन 7 घण्टे कार्य करें तो उसी काम को कितने दिनों में पूरा करेंगे?

हमने क्या सीखा

- यदि x और y सीधे समानुपात में हैं तो दोनों राशियाँ समान अनुपात में परिवर्तित होती है।

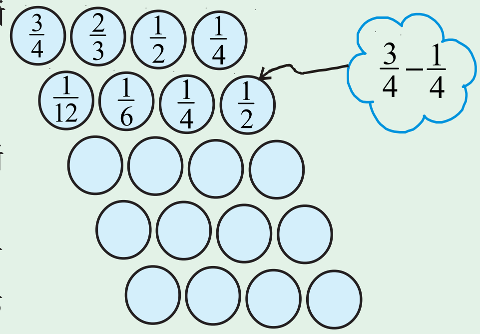
  अर्थात् यदि $\frac{x}{y} = k$ या $x = ky$. हम $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ या $x_1 : y_2 = x_2 : y_1$ [जहाँ y_1, y_2 क्रमशः x_1 और x_2 के संगत y के मूल्य हैं] लिये सकते हैं।
- दो राशियाँ x और y व्युत्क्रम अनुपात में कही जाती है यदि उसमें $xy = k$ प्रकार का संबंध हो जहाँ k स्थिर है।

  यदि y_1, y_2 क्रमशः x_1 और x_2 के संगत मूल्य है y के तब $x_1y_1 = x_2y_2$ (= k),

  या $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$.
- यदि एक राशि में वृद्धि (कमी) से दूसरी राशि में कमी (वृद्धि)समान अनुपात में होती है तो हम कह सकते हैं कि यह परिवर्तन व्युत्क्रम अनुपात में है। प्रथम राशि का अनुपात $(x_1 : x_2)$ दूसरी राशि के व्युत्क्रम अनुपात $(y_1 : y_2)$ के समान होता है। दोनों अनुपात समान है। अतः हम कह सकते हैं कि व्युत्क्रम परिवर्तन एक समानुपात है और इसे व्युत्क्रम समानुपात कहते हैं।
- कभी-कभी किसी समानुपात की राशि में परिवर्तन अन्य दो या अधिक राशियों के परिवर्तन पर निर्भर करता है। तब हम प्रथम राशि के अनुपात को अन्य दो राशियों के गुणित समानुपात के बराबर कर सकते हैं।

डिफी के भिन्न (Diffy with fractions)

इस क्रियाकलाप की प्रक्रिया डिफी कहलाती है। संख्याओं के क्रमगत अंतर को लेकर यह प्रक्रिया बनी है। यह गतिविधि हमें घटाव (व्यवकलन) कौशल में वृद्धि का अभ्यास कराती है।



निर्देश :

सोपान 1: वृत्तों को दिखाए अनुसार बनाइए और पहली पंक्ति में किन्हीं चार भिन्नों को लिखिए।

सोपान 2: दूसरी पंक्ति के पहले तीन वृत्तों में, उनके ऊपर के दायें और बायें वृत्तों के भिन्नों के अंतर लिखिए और पंक्ति के अंतिम वृत्त में ऊपर वाली पंक्ति के पहले और अंतिम वृत्त का अंतर लिखिए, जैसा कि प्रश्न में दिखाया गया है। दोनों को घटाते समय ध्यान रहे कि बड़े भिन्न में से छोटे भिन्न को घटाना है। यही सभी पंक्तियों के वृत्तों के साथ कीजिए।

सोपान 3: पहले सोपान को पुनःदोहराइए। आप बंद कर सकते हैं यदि किसी पंक्ति का मान शून्य प्राप्त करते हैं।

सोपान 4 : सोपान 1, 2 और 3 को कई बार दोहराइए और प्रत्येक बार आरंभ करते समय अलग-अलग भिन्न लें।

पहली पंक्ति में $\frac{2}{7}, \frac{4}{5}, \frac{3}{2}, \frac{5}{6}$ रखकर पुनः उपर्युक्त क्रिया दोहराइए।

अध्याय **11**

बीजगणितीय व्यंजक (ALGEBRAIC EXPRESSIONS)

11.0 परिचय:

माल लीजिए, व्यंजक :

(i) $3+8-9$ (ii) $\frac{1}{3}xy$ (iii) 0 (iv) $3x+5$ (v) $4xy+7$ (vi) $15+0-19$ (vi) $\frac{3x}{y}(y \neq 0)$

(i), (iii) और (vi) संख्यात्मक व्यंजक हैं तथा (ii), (iv) और (v) बीजगणितीय व्यंजक हो।

क्या तुम इनमें अंतर पहचानते हो?

आप और अधिक व्यंजक बना सकते हैं। जैसा कि आप जानते हैं कि व्यंजक चर और अचर के साथ बनते हैं। व्यंजक $3x+5$ में, x चर है और 3, 5 अचर है। $3x$ यह बीजगणितीय पद और 5 संख्यात्मक पद हैं। व्यंजक $4xy+7$ यह x और y चर तथा अचर 4 और 7 से बना है।

अब $\frac{1}{3}xy$ में केवल एक पद है और $2xy+pq-3$ में 3 पद हैं।

अतः तुम जानते हो कि पद, चर और अचरों से बनते हैं।

व्यंजक बनाने के लिए पदों को जोड़ा या घटाया जाता है।

हमा जानते हैं कि व्यंजक $3x+5$ का मान कोई भी संख्या हो सकती है। यदि $x=2$, व्यंजक का मान $3(2)+5=6+5=11$ होगा। x के भिन्न मानो के लिए, व्यंजक $3x+5$ के भिन्न मान रहते हैं।

यह कीजिए :

1. निम्न बीजगणितीय व्यंजकों में पदों की संख्या ज्ञात कीजिए।
   $5xy^2$, $5xy^3-9x$, $3xy+4y-8$, $9x^2+2x+pq+q$.
2. x के लिए भिन्न-भिन्न मान लीजिए और $3x+5$ के मान ज्ञात कीजिए।

कुछ अधिक व्यंजक लीजिए, $5xy^2$, $5xy^3-9x$, $3xy+4y-8$ आदि। यह स्पष्ट है कि $5xy^2$ एक पदीय, $5xy^3-9x$ द्विपदी और $3xy+4y-8$ त्रिपदी हैं।

> एकपदों में चरों के सभी घातों का योग, एकपदी का धातांक रहता है ।

हम जानते कि एक पदीय $5x^2y$ का घातांक '3' है।

इसके अतिरिक्त, द्विपदी $5xy^3-9x$ का घातांक '4'है।

इसी प्रकार त्रिपदी $3xy+4y-8$ का घातांक '2' है।

> व्यंजक में, इसके उच्चतम घातांकवाले पद का धातांक ही व्यंजक का धातांक रहता है ।

व्यंजक जिसमें वास्तव रूप में एक, दो और तीन पद रहते हैं, क्रमशः एक पदी, द्विपदी और त्रिपदी कहलाते है। सामान्यतः कोई भी व्यंजक जिसमें अशून्य गुणों के साथ एक या अधिक पद हों, बहुपदी कहलाता है।

11.1 सजातीय पदों को ध्यान से देखिए :

निम्नलिखित पदों को ध्यान से देखिए :

$2x,\ 3x^2,\ 4x,\ -5x,\ 7x^3$

इन पदों में $2x, 4x, -5x$ का एक ही चर है और घातांक भी समान हैं। इन्हें सजातीय पद कहते हैं। इन पदों में समान संख्यात्मक गुणांक होना जरूरी नहीं है। क्योंकि $8p$ और $8q$ सजातीय पद नहीं है? $8p$ और $8pq$ सजातीय नहीं है? क्योंकि $8p$ और $8p^2$ सजातीय नहीं है?

यह कीजिए

1. निम्न में सजातीय पदों को ज्ञात कीजिए :

   $ax^2y,\ 2x,\ 5y^2,\ -9x^2,\ -6x,\ 7xy,\ 18y^2.$

2. $5pq^2$ के लिए 3 सजातीय पद लिखिए।

11.2 बीजगणितीय व्यंजकों का योग और व्यवकलन

उदाहरण:1 $5x^2 + 3xy + 2y^2$ और $2y^2 - xy + 4x^2$

हल : (एक सीध में स्तंभ के अनुसार हो **व्यंजक के चिह्न न बदलते हुये सजातीय पद को एक दुसरे के नीचे लिखकर योग फल ज्ञात करें।**

$$\begin{array}{rrrr} & 5x^2 & +3xy & +2y^2 \\ + & 4x^2 & -xy & +2y^2 \\ \hline & 9x^2 & +2xy & +4y^2 \\ \hline \end{array}$$

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए।

1. शीला कहती है $2pq$ और $4pq$ का योग $8p^2q^2$ है। क्या वह सही है?
2. रहमान ने $4x$ और $7y$ का योग किया और $11xy$ परिणाम मिला। क्या तुम रहमान से सहमत हो?

उदाहरण :2 $12xy + 4x^2 - 3y^2$ में से $2xy + 9x^2$ घटाइए।

हल : जिस व्यंजक को घटाना है, उसे जिस व्यंजक में से घटाना है उसके नीचे सजातीय पदों को सीध में रखते हुए स्तंभ में लिखिए।

$$\begin{array}{rrr} 12xy & +4x^2 & -3y^2 \\ 2xy & +9x^2 & \\ (-) & (-) & \\ \hline 10xy & -5x^2 & -3y^2 \\ \hline \end{array}$$

घटानेवाले व्यंजक में प्रत्येक पद के चिन्ह बदलकर योग कीजिए ।

[ध्यान दीजिए कि संख्या का घटाना, उसके भोज्य विलोम के योग के समान है। इस तरह, -3 घटाना यह $+3$. जोड़ने के समान है। इसी प्रकार से, $9x^2$ घटना यह $-9x^2$, जोड़ने के समान है। $-3xy$ घटाना यह $+3xy$ जोड़ने के समान है।]

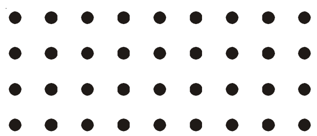
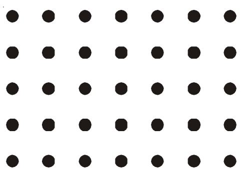
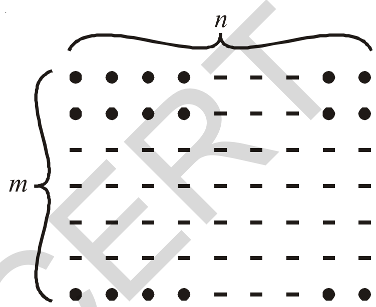
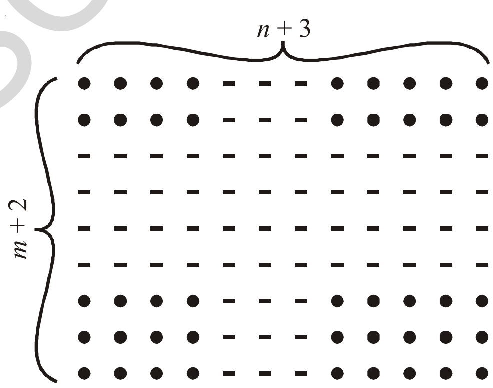
यह कीजिए :

1. यदि $A = 2y^2 + 3x - x^2$, $B = 3x^2 - y^2$ और $C = 5x^2 - 3xy$ तब

   (i) $A + B$ (ii) $A - B$ (iii) $B + C$ (iv) $B - C$ (v) $A + B + C$ (vi) $A + B - C$

11.3 बीजगणितीय व्यंजकों का गुणन :

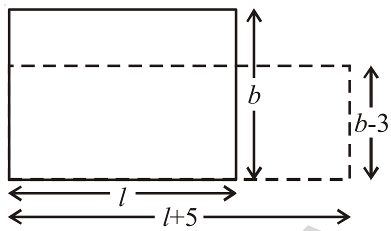
परिचय : (i) निम्न बिन्दुओं की आकृति देखिए।

बिन्दुओं की आकृति	बिन्दुओं की कुल संख्या
	पंक्ति $\times$ स्तंभ
	4×9
	5×7
	$m \times n$
	$(m + 2) \times (n + 3)$

बिंदुओं की कुल संख्या ज्ञात करने के लिए, हम पंक्तियों की संख्या के व्यंजक को स्तंभो की संख्या के व्यंजक से गुणा करना चाहिए ।

यहाँ पंक्तियों की संख्या 2, से बढ़ाई गई अर्थात $m+2$ और स्तंभों की संख्या 3 से बढ़ाई गई अर्थात $n+3$

(ii) क्या तुम अब दूसरी स्थितियाँ सोच सकते हो जिनमें दो बीज गणितीय व्यंजकों का गुणन करना पड़ता है?



अमीना उठी। उसने कहा, हम आयत के क्षेत्रफल के बारे में सोच सकते हैं। आयत का क्षेत्रफल $l \times b$, है, जहाँ लंबाई l और चौड़ाई b है। यदि आयत की लम्बाई की 5 इकाईयाँ बढ़ाई गई अर्थात $(l + 5)$ इकाईयाँ और चौड़ाई में 3 इकाईयाँ कम कर दी गई, अर्थात् $(b - 3)$ तो नये आयत का क्षेत्रफल $(l + 5) \times (b - 3)$ वर्ग इकाइयाँ होगा।

आयत का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हमें बीजगणितीय व्यंजक $l{\times}b$ जैसे गुणन करना चाहिए और $(l{+}5){\times}(b{-}3)$ जैसे विस्तृत करते है ।

(iii) क्या आप घनाभ के आयतन का अनुमान लगा सकते हैं?

(एक आयताकार डिब्बे का आयतन उसकी लम्बाई, चौड़ाई और उंचाई के गुणन से ज्ञात किया जाता है।)

(iv) सरिता ने ध्यान दिलाया कि जब हम वस्तुएँ खरीदते हैं, तो हमें गुणा करना पड़ता है। उदाहरण के लिए, यदि केलों का प्रति दर्जन दर रु.p है और विद्यालय के वनभोज के लिए z दर्जन केलों की आवश्यकता है, तब हमें = रु. p × z देना चाहिए।

माना कि प्रति दर्जन दर रु.2 कम हो जाये और आवश्यक केलों की संख्या 4 दर्जन कम हो जाये तब, केलों का प्रतिदर्जन दर = रु.$(p - 2)$ और आवश्यक केले = $(z - 4)$ दर्जन

इसलिए, हमें देना पड़ेगा = और $(p - 2) \times (z - 4)$

इन्हें प्रयत्न कीजिए :

क्या आप ऐसी और दो स्थितियाँ सोच सकते हैं, जहाँ हमें बीजगणितीतय व्यंजकों का गुणन करना आवश्यक है?

(संकेत : वेग और समय के बारे में सोचिए।

मूलधन, समय और दर %, ब्याज आदि के बारे में सोचिए।)

ऊपर के सभी उदाहरणों में, हमें दो या दो से अधिक राशियों का गुणन करना पड़ेगा। यदि राशियाँ, बीज गणितीय व्यंजकों द्वारा दी गयी हों, हमें उनका गुणनफल ज्ञात करना आवश्यक है। इसका अर्थ है कि हमें जानना चाहिए कि कैसे यह गुणनफल प्राप्त होता है? अब हम इसे योजनाबद्ध तरीके से करेंगे। शुरुआत करने के लिए हम दो एक पदों के गुणन की ओर देखेंगे।

11.4 एकपदी को एकपदी से गुणन करना

11.4.1 दो एकपदीयों का गुणन करना :

हम जानते हैं कि

$$4 \times x = x + x + x + x = 4x$$

और $\quad 4 \times (3x) = 3x + 3x + 3x + 3x = 12x$

अब, निम्न गुणा को ध्यान से देखिए।

(i) $x \times 3y = x \times 3 \times y = 3 \times x \times y = 3xy$

(ii) $5x \times 3y = 5 \times x \times 3 \times y = 5 \times 3 \times x \times y = 15xy$

(iii) $5x \times (-3y) = 5 \times x \times (-3) \times y$

$= 5 \times (-3) \times x \times y = -15xy$

(iv) $5x \times 4x^2 = (5 \times 4) \times (x \times x^2)$

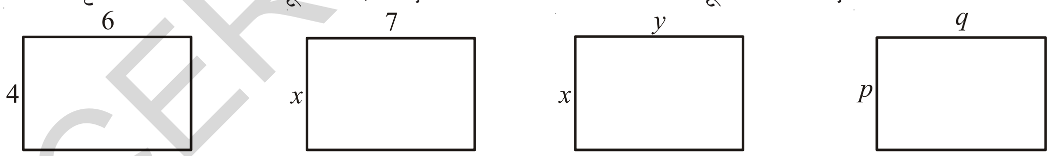
$= 20 \times x^3 = 20x^3$

(v) $5x \times (-4xyz) = (5 \times -4) \times (x \times xyz)$

$= -20 \times (x \times x \times yz) = -20x^2yz$

बीजगणितीय पदों का गुणा ज्ञात करने के लिए समान आधारी चरों के घातांकों का योग करते हैं, हम घातांकों के नियमों का उपयोग करते हैं।

निम्न आकृतियों को ध्यानपूर्वक देखिए और रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।



क्षेत्रफल = 4×6 = 24 इकाइयाँ, क्षेत्रफल = $x \times 7$ = ...क्षेत्रफल= $x \times y$ =.....क्षेत्रफल= .... ×...... = ...

निम्न गुणा को ध्यानपूर्वक देखिए :

1. $7x \times 5y = (7 \times 5) \times (x \times y) = 35xy$
2. $3x \times (-2y) = \{3 \times (-2)\} \times (x \times y) = -6xy$
3. $(-4x) \times (-6y) = (-4) \times (-6) \times (x \times y) = 24xy$
4. $3x \times 5x^2 = (3 \times 5) \times (x \times x^2) = 15x^3$
5. $(-2x^2) \times (-4x^2) = (-2) \times (-4) \times x^2 \times x^2 = 8x^4$

सूचनाः (i) दो धन पूर्णांको का गुणा धन पूर्णांक रहता है।
(ii) दो ऋण पूर्णांकों का गुणा धन पूर्णांक रहता है।
(iii) धन और ऋण पूर्णांकों का गुणा ऋण पूर्णांक रहता है।

यह कीजिए।

1. सारणी पूर्ण कीजिए :

प्रथम एकपदी	द्वतीय एकपदी	दो एकपदियों का गुणन फल
$2x$	$-3y$	$2x \times (-3y) = -6xy$
$-4y^2$	$-2y$	....
$3abc$	$5bcd$	....
mn	$-4m$	....
$-3mq$	$-3nq$	....

2. जाँच कीजिए कि जब दो एकपदीयों का गुणा किया जाता है, क्या तुम्हें हमेशा एकपदी प्राप्त होती है।

11.4.2 तीन या अधिक एकपदीयों का गुणन करना :

निम्न उदाहरणों को ध्यानपूर्वक देखिए :

उदाहरण 3: $5x$, $6y$ और $7z$ का गुणनफल ज्ञात कीजीए।

पद्धति I

$$5x \times 6y \times 7z = (5x \times 6y) \times 7z$$
$$= 30xy \times 7z$$
$$= 210xyz$$

पद्धति II

$$5x \times 6y \times 7z = 5 \times x \times 6 \times y \times 7 \times z$$
$$= 5 \times 6 \times 7 \times x \times y \times z$$
$$= 210\, xyz$$

(गुणांकों का पश्चात चरों का गुणा कीजिए ।)

उदाहरण 4: $3x^2y \times 4xy^2 \times 7x^3y^3$ ज्ञात कीजिए।

हल :
$$= 3 \times 4 \times 7 \times (x^2y) \times (xy^2) \times (x^3y^3)$$
$$= 84 \times x^2 \times y \times x \times y^2 \times x^3 \times y^3$$
$$= 84 \times (x^2 \times x \times x^3) \times (y \times y^2 \times y^3)$$
$$= 84 \times x^6 \times y^6 = 84x^6y^6.$$

उदाहरण 5: $3x$, $-4xy$, $2x^2$, $3y^2$, $5x^3y^2$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल :
$$3x \times (-4xy) \times 2x^2 \times 3y^2 \times 5x^3y^2$$
$$= [3 \times (-4) \times 2 \times 3 \times 5] \times (x \times x \times x^2 \times x^3) \times (y \times y^2 \times y^2)$$
$$= -360x^7y^5.$$

अभ्यास - 11.1

1. निम्न युग्मों का गुणनफल ज्ञात कीजिए :

   (i) $6, 7k$ (ii) $-3l, -2m$ (iii) $-5t^2 -3t^2$ (iv) $6n, 3m$ (v) $-5p^2, -2p$

2. गुणा की सारणी पूर्ण कीजिए।

X	$5x$	$-2y^2$	$3x^2$	$6xy$	$3y^2$	$-3xy^2$	$4xy^2$	x^2y^2
$3x$	$15x^2$	....	....	....	....	....	....	....
$4y$	....	....	....	....	....	....	....	....
$-2x^2$	$-10x^3$	$4x^2 y^2$	....	....	....	....	....	....
$6xy$	....	....	....	....	....	....	....	....
$2y^2$	....	....	....	....	....	....	....	....
$3x^2 y$	....	....	....	....	....	....	....	....
$2xy^2$	....	....	....	....	....	....	....	....
$5x^2y^2$	....	....	....	....	....	....	....	....

3. निम्न सारणी में लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई दी गयी है तो आयताकार डिब्बों के आयतन ज्ञात कीजिए।

क्र.सं.	**लंबाई**	**चौड़ाई**	**ऊँचाई**	**आयतन (v) = $l \times b \times h$**
(i)	$3x$	$4x^2$	5	$v = 3x \times 4x^2 \times 5 = 60x^3$
(ii)	$3a^2$	4	$5c$	$v =$ …………………
(iii)	$3m$	$4n$	$2m^2$	$v =$ …………………
(iv)	$6kl$	$3l^2$	$2k^2$	$v =$ …………………
(v)	$3pr$	$2qr$	$4pq$	$v =$ …………………

4. निम्न एकपदीयों का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

   (i) xy, x^2y, xy, x (ii) a, b, ab, a^3b, ab^3 (iii) kl, lm, km, klm

   (iv) pq, pqr, r (v) $-3a, 4ab, -6c, d$

5. यदि $A = xy$, $B = yz$ और $C = zx$, तो ABC ज्ञात कीजिए।

6. यदि $P = 4x^2$, $T = 5x$ और $R = 5y$, तो $\dfrac{PTR}{100} =$ ……….

7. तुम स्वयं कुछ एकपदीयाँ लिखिए और उनका गुणनफल ज्ञात कीजिए।

11.5 द्विपदी या त्रिपदी को एकपदी से गुणन करना :

11.5.1 द्विपदी को एकपदी से गुणन करना :

एकपदी $5x$ और द्विपदी $6y+3$ का गुणन करना

गुणा के अंतर्गत प्रक्रिया है :

सोपान	निर्देश	कार्यविधि
1.	गुणा के चिन्ह का उपयोग करते हुए एक पदी और द्वीपदी का गुणा लिखिए।	$5x \times (6y+3)$
2.	वितरण-नियम का उपयोग कीजिए : एकपदी को द्विपदी के प्रथम पद से गुणा कीजिए। एक पदी के द्विपदी के द्वितीय पद से गुणा कीजिए और उनके गुणा का योग कीजिए।	$(5x \times 6y) + (5x \times 3)$
3.	पदों को सरल कीजिए	$30xy + 15x$

अत: $5x$ और $6y+3$ का गुणा

हल : $5x(6y + 3) = 5x \times (6y + 3)$

$$= (5x \times 6y) + (5x \times 3)$$
$$= 30xy + 15x$$

उदाहरण 6: $(-4xy)(2x - y)$ का गुणन फल ज्ञात कीजिए।

हल : $(-4xy)(2x - y) = (-4xy) \times (2x - y)$

$$= (-4xy)\times 2x + (-4xy) \times (-y)$$
$$= -8x^2y + 4xy^2$$

उदाहरण 7: $(3m - 2n^2)(-7mn)$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल : $(3m - 2n^2)(-7mn) = (3m - 2n^2) \times (-7mn)$

$$= (-7mn) \times (3m - 2n^2) \quad \boxed{\because \text{क्रमविनिमेय नियम}}$$
$$= ((-7mn) \times 3m) - ((-7mn) \times 2n^2)$$
$$= -21m^2n + 14mn^3$$

यह कीजिए :

1. गुणनफल ज्ञात कीजीए : (i) $3x(4ax + 8by)$ (ii) $4a^2b(a-3b)$ (iii) $(p + 3q^2)pq$ (iv) $(m^3 + n^3)5mn^2$
2. एकपदी और द्वीपदी के गुणनफल के अधिकतम पदों की संख्या बताईए ?

11.5.2 त्रिपदी को एकपदी द्वारा गुणन करना :

माना कि एकपदी $2x$ और त्रीपदी $(3x + 4y - 6)$

उनका गुणनफल $= 2x \times (3x + 4y - 6)$

$= (2x \times 3x) + (2x \times 4y) + (2x \times (-6))$ (वितरण नियम का उपयोग करते हुए)

$= 6x^2 + 8xy - 12x$

एकपदी और त्रिपदीयों का गुणा में कितने अधिकतम पद रहते है ?

अभ्यास - 11.2

1. सारणी पूर्ण कीजिए :

क्र.सं.	प्रथम व्यंजक	द्वितीय व्यंजक	गुणनफल
1	$5q$	$p+q-2r$	$5q(p+q-2r)=5pq+5q^2-10qr$
2	$kl+lm+mn$	$3k$	………………………………
3	ab^2	$a+b^2+c^3$	………………………………
4	$x-2y+3z$	xyz	………………………………
5	$a^2bc+b^2cd-abd^2$	$a^2b^2c^2$	………………………………

2. सरल कीजिए : $4y(3y+4)$
3. सरल कीजिए : $x(2x^2 - 7x+3)$ और (i) $x = 1$ (ii) $x = 0$ के लिए इसके मान ज्ञात कीजिए।
4. गुणनफल का योग कीजिए : $a(a- b), b(b- c), c(c- a)$
5. गुणनफल का योग कीजिए : $x(x+y- r), y(x- y+r), z(x- y- z)$
6. $3x(x+2y)$ के गुणनफल में से $2x(5x- y)$ का गुणनफल घटाइए।
7. $6k(2k+3l- 2m)$ में से $3k(5k- l+3m)$ घटाइए।
8. सरल कीजिए : $a^2(a- b+c)+b^2(a+b- c)- c^2(a- b- c)$

11.6 द्विपदी को द्विपदी अथवा त्रिपदी द्वारा गुणन करना :

11.6.1 द्विपदी को द्विपदी द्वारा गुणा करना :

मान लीजिए, $5x+6y$ और $3x - 2y$ दो द्विपदी है।

अब $5x+6y$ और $3x -2y$ दो द्विपदी का गुणा

गुणा की कार्यविधि होगीः

सोपान	निर्देश	
1.	दो द्विपदीयों का गुणा लिखिए।	$(\underline{5x}+\underline{6y})(3x-2y)$
2.	वितरण नियम का उपयोग किजिए। प्रथम द्विपदी के प्रथम पद से द्वितीय द्विपदी के द्वितीय पद से द्वितीय द्विपदी के गुणा कीजिए और गुणनफल को जोड़ दीजिए।	$\underline{5x}(3x-2y)+\underline{6y}(3x-2y)$ $=(5x\times 3x)-(5x\times 2y)+(6y\times 3x)-(6y\times 2y)$
3.	सरल कीजिए	$(5x\times 3x)-(5x\times 2y)+(6y\times 3x)-(6y\times 2y)$ $=15x^2-10xy+18xy-12y^2$
4.	सजातीय पदों का योग कीजिए।	$=15x^2+8xy-12y^2$

अतः $5x+6y$ और $3x-2y$ का गुणा

$= (5x+6y)(3x-2y)$

$= 5x(3x-2y)+6y(3x-2y)$ (वितरण के उपयोग द्वारा)

$= (5x\times 3x)-(5x\times 2y)+(6y\times 3x)-(6y\times 2y)$

$= 15x^2-10xy+18xy-12y^2$

$= 15x^2+8xy-12y^2$

यह कीजिए :

1. गुणन फल ज्ञात कीजिए :

   (i) $(a-b)(2a+4b)$ (ii) $(3x+2y)(3y-4x)$

   (iii) $(2m-l)(2l-m)$ (iv) $(k+3m)(3m-k)$

2. दो द्विपदीयों के गुणनफल के पदों की संख्या कितनी होंगी?

11.6.2 द्विपदी को त्रिपदी द्वारा गुणा करना :

माना कि द्विपदी $2x+3y$ और त्रिपदी $3x+4y-5z$.

अब, हम $2x+3y$ को त्रिपदी $3x+4y-5z$ द्वारा गुणा करेंगे।

गुणन की प्रिक्रया है :

सोपान	निर्देश	प्रिक्रया
1.	गुणन के चिन्ह का उपयोग करते हुए द्विपदी और त्रिपदी का गुणा लिखिए।	$(2x+3y)(3x+4y-5z)$
2.	**वितरण नियम का उपयोग कीजिए :** द्विपदी के प्रथम पद को त्रिपदी द्वारा गुणा कीजिए और द्विपदी के द्वितीय पद को त्रिपदी द्वारा गुणा कीजिए। तदन्तर गुणनफल का योग कीजिए।	$2x(3x+4y-5z)+3y(3x+4y-5z)$
3.	सरल कीजिए	$(2x\times3x)+(2x\times4y)-(2x\times5z)+$ $(3y\times3x)+(3y\times4y)-(3y\times5z)$ $6x^2+8xy-10xz+9xy+12y^2-15yz$
4.	सजातीय पदों का योग कीजिए	$6x^2+17xy-10xz+12y^2-15yz$

अतः $(2x+3y)$ और $(3x+4y-5z)$ का गुणा

$= (2x+3y)(3x+4y-5z)$

$= 2x(3x+4y-5z)+3y(3x+4y-5z)$ (वितरण नियम के उपयोग द्वारा)

$= (2x\times3x)+(2x\times4y)-(2x\times5z)+(3y\times3x)+(3y\times4y)-(3y\times5z)$

$= 6x^2+8xy-10xz+9xy+12y^2-15yz$

$= 6x^2+17xy-10xz+12y^2-15yz$

द्विपदी और त्रिपदी के गुणनफल में कितने अधिकतम पद प्राप्त होगे ?

अभ्यास - 11.3

1. द्विपदीयों का गुणा कीजिए :

   (i) $2a-9$ and $3a+4$ (ii) $x-2y$ and $2x-y$

   (iii) $kl+lm$ and $k-l$ (iv) m^2-n^2 and $m+n$

2. गुणनफल ज्ञात कीजिए :

   (i) $(x+y)(2x-5y+3xy)$ (ii) $(a-2b+3c)(ab^2-a^2b)$

   (iii) $(mn-kl+km)(kl-lm)$ (iv) $(p^3+q^3)(p-5q+6r)$

3. सरल कीजिए :

(i) $(x-2y)(y-3x)+(x+y)(x-3y)-(y-3x)(4x-5y)$

(ii) $(m+n)(m^2-mn+n^2)$

(iii) $(a-2b+5c)(a-b)-(a-b-c)(2a+3c)+(6a+b)(2c-3a-5b)$

(iv) $(pq-qr+pr)(pq+qr)-(pr+pq)(p+q-r)$

11.7 सर्वसमिका क्या है?

माना कि समीकरण $a(a-2)=a^2-2a$

a के किसी भी मान के लिए समीकरण के दोनों पक्षों का मूल्यांकन कीजिए।

$a=5$ के लिए, $\text{LHS} = 5(5-2) = 5\times3 = 15$

$\text{RHS} = 5^2-2(5) = 25-10 = 15$

अतः, समीकरण में $a=5$ के लिए LHS = RHS

इसी प्रकार $a = -2$ के लिए

$\text{LHS} = (-2)(-2-2) = (-2)\times(-4) = 8$

$\text{RHS} = (-2)^2-2(-2) = 4+4 = 8$

इस तरह $a=-2$ के लिए भी LHS = RHS

हम कह सकते है कि a के किसी भी मान के लिए समीकरण सही है। इसलिए समीकरण, सर्वसिमका कहलाती है।

माना कि समीकरण $a(a+1) = 6$

यह समीकरण केवल $a = 2$ और -3 के लिए सही है परन्तु यह किसी दूसरे मानों के लिए सही नहीं है। यह समीकरण $a(a+1) = 6$ सर्वसमिका नहीं है।

एक समीकरण, सर्वसमिका कहलाती है यदि इसके चरों के स्थान पर कोई भी मान प्रतिस्थापित करने पर समीकरण संतुष्ट होता है।

समीकरण, उसने विद्यमान चर के लिए, कुछ विशिष्ट मानों के लिए सही रहता है जबकि सर्वसमिका, उसमें विद्यमान सभी के लिए, सभी मानों के लिए सही रहती है। इस तरह, यह सर्वव्यापक रूप से सही समीकरण जाना जाता है।

सर्वसमिका निर्देशित करने के लिए हम '$\equiv$' (सर्वसमरूप से बराबर इस प्रकार पढ़ते है) चिन्ह का उपयोग करते है।

11.8 कुछ महत्वपूर्ण सर्व समिकाएँ :

हम हमेशा कुछ सर्वसमिकाओं का उपयोग करते है जो समस्या हल करने में सहायक रहती है। गुणन में सहायक सर्वसमिकाएँ विशेष गुणनफल के नाम से जानी जाती है। इनमें से हम तीन महत्वपूर्ण सर्वसमिकाओं का अभ्यास करेंगे, द्विपदी के गुणनफल है।

मान लीजिए, $(a + b)^2$

अब, $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$

$= a(a + b) + b(a + b)$

$= a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2$ (क्यौंकि $ab = ba$)

$= a^2 + 2ab + b^2$

इस तरह $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (I)

अब, a=2, b=3, लीजिए, हमें प्राप्त होता है,

$(LHS) = (a + b)^2 = (2+3)^2 = 5^2 = 25$

$(RHS) = a^2 + 2ab + b^2 = 2^2 + 2(2)(3) + 3^2 = 4 + 12 + 9 = 25$

LHS और RHS की ओर ध्यान दीजिए। व्यंजक के मान LHS और RHS में समान है।

कुछ धन पूर्णांक, ऋण पूर्णांक और भिन्न के लिए सर्वसमिका की जाँच कीजिए।

यह कीजिए :

क्या निम्न समीकरण सर्वसमीकाएँ है? जाँच कीजिए।

(i) $(a - b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$

(ii) $(a + b)(a - b) \equiv a^2 - b^2$

(iii) $(a + b + c)^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

ध्यान दीजिए, एक और सर्वसमिका, $(x + a)(x + b) \equiv x^2 + (a + b)x + ab$,

$(x + a)(x + b) = x(x + b) + a(x + b)$

$= x^2 + bx + ax + ab$

$= x^2 + (a + b)x + ab$

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए।

अब $x = 2$, $a = 1$ और $b = 3$, लीजिए, सर्वसमिका की जाँच कीजीए।

- तुम क्या देखते हो ? क्या LHS = RHS?
- ऊपर की सर्वसमिका की जाँच के लिए x, a, b के भिन्न-भिन्न मान लीजिए।
- क्या a और b के सभी मान के लिए हमेशा LHS = RHS ?

- मान लीजिए $(x+p)(x+q) = x^2 + (p+q)x + pq$
  (i) 'p' के अलावा q रखनेपर तुम क्या देखोगे?
  (ii) 'q' के अलावा p रखनेपर तुम क्या देखोगे?

11.9 सर्वसमिकाओं के अनुप्रयोग :

उदाहरण 8: $(3x+4y)^2$

हल : $(3x+4y)^2$ यह दो द्विपदी व्यंजकों का गुणा है जिसमें एक ही पद $(3x+4y)$ और $(3x+4y)$ है। द्विपदी का द्विपदी से गुणा करने की विधि से इसका विस्तार कर सकते है। इस गुणनफल के साथ सर्वसमिका की तुलना कीजिए। इस गुणनफल में $a = 3x$ और $b = 4y$ है। प्रथम सर्वसमिकाओं a और b के स्थान पर क्रमशः $3x$ और $4y$ प्रतिस्थापित करने पर इस गुणनफल का परिमाण हमें प्राप्त होता है। $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

अतः $(3x+4y)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(4y) + (4y)^2$

$= 9x^2 + 24xy + 16y^2$

जहाँ $a = 3x$ और $b = 4y$
सर्वसमिका $(a+b)^2 \equiv a^2+2ab+b^2$

उदाहरण 9: 204^2 ज्ञात कीजिए।

$204^2 = (200+4)^2$

$= (200)^2 + 2(200)(4) + 4^2$

$= 40000 + 1600 + 16$

$= 41616$

जहाँ $a = 200$ और $b = 4$
सर्वसमिका $(a+b)^2 \equiv a^2+2ab+b^2$

यह कीजिए :

ज्ञात कीजिए : (i) $(5m+7n)^2$ (ii) $(6kl+7mn)^2$ (iii) $(5a^2+6b^2)^2$ (iv) 302^2
(v) 807^2 (vi) 704^2
(vii) सर्वसमिका : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, की जाँच कीजिए, जहाँ $a = 3m$ और $b = 5n$

उदाहरण 10: $(3m-5n)^2$ ज्ञात कीजिए।

हल : $(3m-5n)^2 = (3m)^2 - 2(3m)(5n) + (5n)^2$

$= 9m^2 - 30mn + 25n^2$

जहाँ $a = 3m$ और $b = 5n$
सर्वसमिका: $(a-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$

उदाहरण 11: 196^2 ज्ञात कीजिए।

$196^2 = (200-4)^2$

$= 200^2 - 2(200)(4) + 4^2$

$= 40000 - 1600 + 16$

$= 38416$

जहाँ $a = 200$ और $b = 4$
सर्वसमिका : $(a-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$

यह कीजिए :

ज्ञात कीजिए : (i) $(9m-2n)^2$ (ii) $(6pq-7rs)^2$ (iii) $(5x^2-6y^2)^2$

(iv) 292^2 (v) 897^2 (vi) 794^2

उदाहरण 12: ज्ञात कीजिए $(4x+5y)(4x-5y)$

हल : $(4x+5y)(4x-5y) = (4x)^2 - (5y)^2$

$= 16x^2 - 25y^2$

जहाँ $a = 4x$ और $b = 5y$
सर्वसमिका : $(a+b)(a-b) \equiv a^2 - b^2$

उदाहरण 13: ज्ञात कीजिए 407×393

हल : $407 \times 393 = (400+7)(400-7)$

$= 400^2 - 7^2$

$= 160000 - 49$

$= 159951$

जहाँ $a = 400$ और $b = 7$
सर्वसमिका: $(a+b)(a-b) \equiv a^2 - b^2$

उदाहरण 14: ज्ञात कीजिए $987^2 - 13^2$

हल : $987^2 - 13^2 = (987+13)(987-13)$

$= 1000 \times 974 = 974000$

जहाँ $a = 987$ और $b = 13$
सर्वसमिका: $a^2 - b^2 \equiv (a+b)(a-b)$

इन्हें कीजिए :

ज्ञात कीजिए : (i) $(6m+7n)(6m-7n)$ (ii) $(5a+10b)(5a-10b)$

(iii) $(3x^2+4y^2)(3x^2-4y^2)$ (iv) 106×94 (v) 592×608 (vi) $92^2 - 8^2$

(vii) $984^2 - 16^2$

उदाहरण 15: ज्ञात कीजिए 302×308

हल : $302 \times 308 = (300+2)(300+8)$

$= 300^2 + (2+8)(300) + (2)(8)$

$= 90000 + (10 \times 300) + 16$

$= 90000 + 3000 + 16 = 93016$

जहाँ $x = 300$, $a = 2$ और $b = 8$ सर्वसमिका : $(x+a)(x+b) \equiv x^2 + (a+b)x + ab$

उदाहरण 16: ज्ञात कीजिए 93×104

जहाँ $x = 100$ $a = -7$ और $b = 4$
सर्वसमिका: $(x + a)(x + b) \equiv x^2 + (a+b)x + ab$

हल :

$$93 \times 104 = (100 + (-7))(100 + 4)$$

$$93 \times 104 = (100 - 7)(100 + 4)$$

$$= 100^2 + (-7 + 4)(100) + (-7)(4)$$

$$= 10000 + (-3)(100) + (-28)$$

$$= 10000 - 300 - 28$$

$$= 10000 - 328 = 9672$$

क्या तुमने ध्यान दिया? सर्वसमिकाओं के उपयोग द्वारा गुणनफल ज्ञात करना, प्रत्यक्ष गुणन से गुणनफल ज्ञात करने की अपेक्षा अधिक आसान है।

अभ्यास - 11.4

1. उचित सर्वसमिका का चयन कीजिए और निम्नलिखित गुणनफल ज्ञात कीजिए।

   (i) $(3k + 4l)(3k + 4l)$ (ii) $(ax^2 + by^2)(ax^2 + by^2)$

   (iii) $(7d - 9e)(7d - 9e)$ (iv) $(m^2 - n^2)(m^2 + n^2)$

   (v) $(3t + 9s)(3t - 9s)$ (vi) $(kl - mn)(kl + mn)$

   (vii) $(6x + 5)(6x + 6)$ (viii) $(2b - a)(2b + c)$

2. उपर्युक्त सर्वसमिका के उपयोग द्वारा निम्न का मूल्यांकन कीजिए :

   (i) 304^2 (ii) 509^2 (iii) 992^2 (iv) 799^2

   (v) 304×296 (vi) 83×77 (vii) 109×108 (viii) 204×206

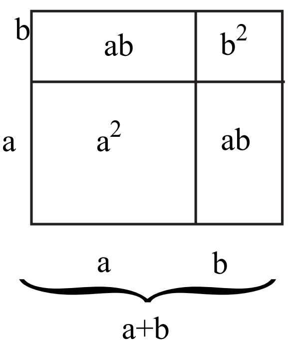
11.10 सर्वसमिकाओं का ज्यामितीय सत्यापन :

11.10.1 सर्वसमिका $(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$ की ज्यामितीय जाँच :

निम्न वर्ग को ध्यान से देखिए :

माना कि वर्ग की भुजा $(a + b)$

इसका क्षेत्रफल = भुजा का वर्ग = $(\mathbf{a + b})^2$



आकृति में बताया गया जैसे वर्ग को चार भागों में विभाजित किया।

इसमें क्रमशः 'a' और 'b' भुजाओं के दो वर्ग और दो आयत जिनकी a+b लम्बाई और चौड़ाई क्रमशः 'a' और 'b' है।

स्पष्टतः, दिये गये वर्ग का क्षेत्रफल, इन चारों भागों के क्षेत्रफल के योग के बराबर होगा।

वर्ग का क्षेत्रफल

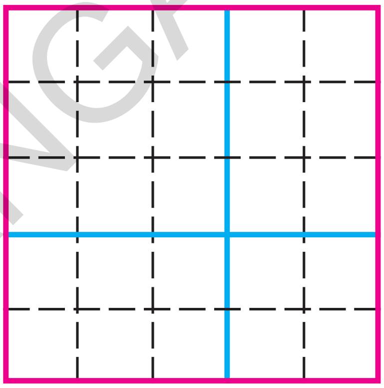
= a भुजाके वर्ग का क्षेत्रफल + 'b' भुजा के वर्ग का क्षेत्रफल $+a$ और b भुजाओं के आयत का क्षेत्रफल $+b$ और a भुजाओं के आयत का क्षेत्रफल

= $a^2 + ab + ba + b^2$

= $a^2 + 2ab + b^2$

क्षेत्रफल, $(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$

उदाहरण 17: सर्वसमिका $(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$ की $a = 3$ और $b = 2$ लेते हुए ज्यामितीय रूप से जाँच कीजिए।



हल : $(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$

$a + b = 3 + 2$ भुजा का एक वर्ग बनाईए।

L.H.S. = पूर्म वर्ग का क्षेत्रफल

= $(3+2)^2 = 5^2 = 25$

R.H.S. = 3 इकाई भुजा के वर्ग का क्षेत्रफल

2 इकाई भुजा के वर्ग का क्षेत्रफल

+ 3 इकाइ, 2 इकाईयों के आयत का क्षेत्रफल

+ 2 इकाइ, 3 इकाईयों के आयत का क्षेत्रफल

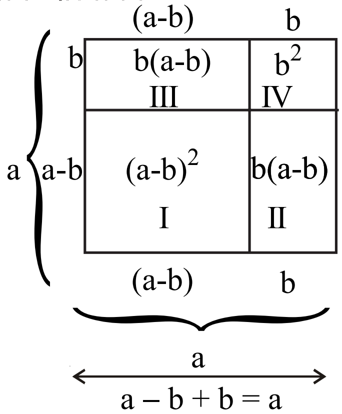
= $3^2 + 2^2 + 3 \times 2 + 3 \times 2$

= $9 + 4 + 6 + 6 = 25$

L.H.S. = R.H.S.

$\therefore$ अतः सर्वसमिका का सत्यापन सिद्ध हुआ।

11.10.2 सर्वसमिका $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ का ज्यामितीय सत्यापन :



माना कि वर्ग की भुजा a.

- वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा = a^2
- वर्ग को चार भागों में विभाजित किया।
- इसमें क्रमशः a – b भुजा और b भुजा के दो वर्ग और दो आयत जिनकी लम्बाई और चौड़ाई क्रमशः 'a – b' और 'b' हैं।

अब, आकृति I का क्षेत्रफल = 'a' भुजा के वर्ग का क्षेत्रफल

- आकृति II का क्षेत्रफल - आकृति III का क्षेत्रफल – आकृति IV का क्षेत्रफल

$(a-b)^2 \ = a^2 - b\,(a-b) - b\,(a-b) - b^2$

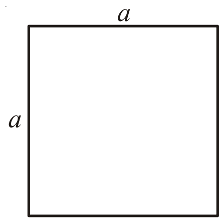
$= a^2 - ab + b^2 - ab + b^2 - b^2$

$= a^2 - 2ab + b^2$

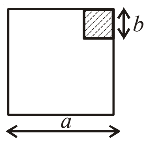
11.10.3 सर्वसमिका $(a + b)(a - b) \equiv a^2 - b^2$ का ज्यामितीय सत्यापन

$a^2 - b^2$ = ('a' भुजा के वर्ग का क्षेत्रफल) – ('b'भुजा वर्ग का क्षेत्रफल)

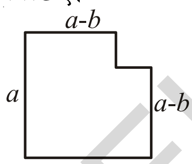
निम्न आकृति ध्यानपूर्वक देखिए :



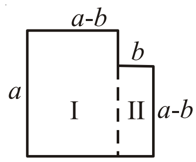
इसमें से b ($b < a$) भुजा का वर्ग काटिए।



हमें प्राप्त होता है



इसमें दो भाग है



अतः $a^2 - b^2$ = आकृति I का क्षेत्रफल + आकृति II का क्षेत्रफल

$= a\,(a - b) + b\,(a - b)$

$= (a - b)\,(a + b)$

इस तरह, $a^2 - b^2 \equiv (a - b)\,(a + b)$

अभ्यास - 11.5

1. सर्वसमिका $(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$ का ज्यामितीय रूप से निम्न नाप लेते हुए सत्यापन सिद्ध कीजिए।

   (i) $a = 2$ इकाइयाँ $b = 4$ इकाइयाँ (ii) $a = 3$ इकाइयाँ, $b = 1$ इकाइ

   (iii) $a = 5$ इकाइयाँ, $b = 2$ इकाइयाँ

2. ज्यामितीय रूप से निन्न नापों को लेकर सर्वसमिका $(a - b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$ के सत्यापनता की जाँच कीजिए।

   (i) $a = 3$ इकाइयाँ $b = 1$ इकाइ (ii) $a = 5$ इकाइयाँ, $b = 2$ इकाइयाँ

3. सर्वसमिका $(a + b)\,(a - b) \equiv a^2 - b^2$ का ज्यामितीय रूप से निम्न नापों को लेकर सत्यापन सिद्ध कीजिए।

   (i) $a = 3$ इकाइयाँ, $b = 2$ इकाइयाँ

   (ii) $a = 2$ इकाइयाँ, $b = 1$ इकाइ

हमने क्या चर्चा की :

1. कई स्थितियाँ ऐसी हैं जिनमें हमें बीजगणितीय व्यंजकों का गुणन करना आवश्यक है। उदाहरण के लिए, उस आयत का क्षेत्रफल ज्ञात करना जिसकी भुजाएँ व्यंजकों के रूप में दी हैं।
2. एकपदी को एकपदी से गुणा करने पर हमेशा एकपदी प्राप्त होता है।
3. बहुपदी को द्विपदी (अथवी त्रिपदी) से गुणा पूर्ण करते समय हम पद का पद से गुणा करते हैं, अर्थात बहुपदी के प्रत्येक पद का द्विपदी (अथवा त्रिपदी) में प्रत्येक पद से गुणा करते हैं। ध्यान दीजिए कि ऐसे गुणन में, हमें गुणा में ऐसे पद प्राप्त होना संभव है जो सजातीय रहते हैं और इनका योग करना चाहिए।
4. सर्वसमिका, एक ऐसा समीकरण है जो समीकरण में इसके चरों के सभी मानों के लिए सही रहता है।

   दूसरी ओर समीकरण इसके चरों के कुछ विशिष्ट मानों के लिए सही रहता है।
5. निम्नलिखित सर्वसमिकाएँ हैं :

   I. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

   II. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

   III. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

   IV. $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$
6. ऊपर की चार सर्वसमिकाएँ बीजगणितीय व्यंजकों का वर्ग और गुणा के लिए उपयोगी हैं। यह संख्याओं के गुणन की गणना आदि के लिए आसान वैकल्पिक पद्धति है।

अध्याय 12

गुणनखंडन (FACTORIZATION)

12.0 परिचयः

माना कि संख्या 42 है। '42' को कोई दो संख्याओं के गुणा के रूप में लिखने का प्रयत्न कीजिए।

$$\begin{aligned} 42 &= 1 \times 42 \\ &= 2 \times 21 \\ &= 3 \times 14 \\ &= 6 \times 7 \end{aligned}$$

इस तरह 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21 और 42 ये 42 के गुणनखण्ड है। इन गुणनखण्डों में, कौन-सी अभाज्य संख्याएँ हैं?

क्या तुम 42 को अभाज्य संख्याओं गुणा के रूप में लिख सकते हो?

रफी ने इस प्रकार किया	शिरीषा ने इस प्रकार किया	अकबर ने इस प्रकार किया
$42 = 2 \times 21$ $= 2 \times 3 \times 7$	$42 = 3 \times 14$ $= 2 \times 3 \times 7$	$42 = 6 \times 7$ $= 2 \times 3 \times 7$

तुमने क्या देखा? हमने देखा कि प्रत्येक स्थिति में अभाज्य गुणनखण्ड $2 \times 3 \times 7$ है।

अब दूसरी संख्या लीजिए '70'

70 के गुणनखंड 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35 और 70 हैं।

70 को $2 \times 5 \times 7$ अभाज्य गुणनखण्डों के गुणा के रूप में लिख सकते है।

गुणन-खण्डन का रूप जहाँ सभी गुणनखण्ड अभाज्य रहते हैं, अभाज्य गुणनखण्ड रूप का गुणा कहते हैं।

$$\begin{aligned} 70 &= 1 \times 70 \\ &= 2 \times 35 \\ &= 5 \times 14 \\ &= 7 \times 10 \end{aligned}$$

यह कीजिए :

दी गई संख्याएँ अभाज्य के गुणा के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) 48 (ii) 72 (ii) 96

संख्याओं के लिए जैसा हमने किया वैसे ही बीजगणितीय व्यंजक भी उनके गुणनखण्डों के गुणा के रूप में व्यक्त कर सकते है। इस अध्याय में हम विविध बीजगणितीय व्यंजकों के गुणन-खण्डन के बारे में सीखेंगे।

12.1 बीजगणितीय व्यंजक के गुणनखंड:

निम्न उदाहरण लीजिए :

$7yz \;= 7(yz)$ (7 और yz गुणनखंड हैं।)

$\;\;\;\;\;\;= 7y(z)$ ($7y$ और z गुणनखंड हैं।)

$\;\;\;\;\;\;= 7z(y)$ ($7z$ और y गुणनखंड हैं।)

$\;\;\;\;\;\;= 7 \times y \times z$ ($7, y$ और z गुणनखंड हैं।)

ऊपर के गुणनखण्डों में $7, y, z$ अलघुकृत गुणनखण्ड है। बीजगणितीय व्यंजको में वाक्यांश अलघुकृत, अभाज्य के स्थान पर उपयोग करते है। इस तरह हम कहते है कि $7yz$ का अलघुकृत रूप $7 \mathrm{x}\, y\, \mathrm{x}\, z$ है। ध्यान में रखिए कि $7{\times}(yz)$ अथवा $7y(z)$ अथवा $7z(y)$ अलघुकृत रूप नहीं है।

> $7yz$, का 1 गुणनखण्ड है क्योंकि $7yz = 1{\times}7{\times}y{\times}z$.
> वस्तुत: प्रत्येक पद का '1' गुणनखण्ड रहता है । किन्तु जबतक जरूरत न हो, अलग से '1' लिखने की आवश्यकता नहीं है ।

अब व्यंजक $7y(z+3)$ लिजिए। यह $7y\,(z + 3) = 7 \times y \times (z+3)$ जैसे लिख सकते है। यहाँ $7, y, (z + 3)$ अलघुकृत गुणनखंड है।

इसी के समान $5x\,(y+2)\,(z+3) = 5 \times x \times (y + 2) \times (z + 3)$ यहाँ $5\,, x\,, (y + 2)\,, (z + 3)$ अलघुकृत गुणनखंड है।

इसे कीजिए।

1. निम्न के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए :

   (i) $8x^2yz$ (ii) $2xy\,(x + y)$ (iii) $3x + y^3z$

12.2 गुणन-खण्डन की आवश्यकता :

जब बीजगणितीय व्यंजक के खंड किये जाते हैं तब इसके गुणनखंडो के गुणा के रूप में इसे लिखते हैं। यह गुणनखण्ड, संख्यात्मक, बीजगणितीय चर अथवा बीजगणितीय व्यंजकों के पद हो सकते है।

माना कि बीजगणितीय व्यंजक $23a + 23b + 23c$. इसे $23(a + b + c)$ भी लिख सकते है। यहाँ अलघुकृत गुणनखंड 23 और $(a + b + c)$ 23 संख्यात्मक गुणनखण्ड है और $(a + b + c)$ बीजगणितीय गुणनखण्ड है।

बीजगणितीय व्यंजक लीजिए : (i) $x^2y + y^2x + xy$ (ii) $(4x^2 - 1) \div (2x - 1)$.

प्रथण व्यंजक $x^2y + y^2x + xy = xy(x + y + 1)$

इस तरह ऊपर के व्यंजक को आसान रूप में लिखते है।

द्वितीय उदाहरण $(4x^2 - 1) \div (2x - 1)$

$$\frac{4x^2-1}{2x-1} = \frac{(2x)^2-(1)^2}{2x-1}$$

$$= \frac{(2x+1)(2x-1)}{(2x-1)}$$

$$= (2x + 1)$$

ऊपर के उदाहरण से यह ध्यान में आता है कि गुणन खण्डन के कारण बीजगणितीय व्यंजक सरल रूप में लिख सकते है। इससे बीजगणितीय व्यंजक के भाग में भी सहायता होती है।

अब हम बीजगणितीय व्यंजकों के गुणन-खण्डन की कुछ पद्धतियों के बारे में चर्चा करेंगे।

12.3 समान (उभयनिष्ट) गुणनखण्डों की पद्धति :

हम $3x + 12$ के गुणनखण्ड करेंगे।

प्रत्येक पद को अलघुकृत गुणनखण्ड के गुणा के रूप में लिखने पर हमें प्राप्त होता है।

$3x + 12 = (3 \times x) + (2 \times 2 \times 3)$

दोनों पदों में समान गुणनखण्ड कौन-से हैं?

समान गुणनखण्ड 3 अलग लेने के बाद, हमें प्राप्त होता है,

$3 \times [x + (2\times2)] = 3 \times (x + 4) = 3\ (x + 4)$

अब हम कहते हैं कि $3x + 12$ के 3 और $(x + 4)$ गुणनखण्ड है।

ध्यान दीजिए कि ये गुणनखण्ड अलघुकृत है।

अब और एक व्यंजक $6ab+12b$ के गुणनखण्ड करेंगे।

ध्यान दीजिए कि $6ab$ औक $12b$ का महत्तम समापवर्त्य $6b$ हैं ।

$6ab+12b = (\underline{2 \times 3} \times a \times \underline{b}) + (2 \times \underline{2 \times 3 \times b})$

$= \underline{2 \times 3 \times b} \times (a + 2) \quad = 6b\ (a + 2)$

$\therefore\ 6ab + 12b = 6b\ (a + 2)$

उदाहरण 1: गुणनखण्ड कीजिए : (i) $6xy + 9y^2$ (ii) $25\ a^2b + 35ab^2$

हल : (i) $6xy + 9y^2$

हमें पता है, $6\,x\,y = 2 \times \underline{3} \times x \times \underline{y}$ और $9y^2 = 3 \times \underline{3 \times y} \times y$

'दोनों पदों में समान गुणनखण्ड 3 और y' है।

अतः, $6xy + 9y^2$

$$= (2 \times \underline{3} \times x \times \underline{y}) + (3 \times \underline{3 \times y} \times y) \quad \text{(दोनों पदों का संयोग करने पर)}$$

$$= \underline{3 \times y} \times [(2 \times x) + (3 \times y)]$$

ध्यान दीजिए कि व्यंजक का गुणनखण्ड रूप को केवल एक पद मानते है ।

$$\therefore\ 6xy + 9y^2 = 3y(2x + 3y)$$

(ii) गुणनखण्ड कीजिए: $3x^2 + 6x^2y + 9xy^2$

$$3x^2 + 6x^2y + 9xy^2 = (\underline{3 \times} x \times x) + (2 \times \underline{3 \times} x \times x \times y) + (3 \times \underline{3 \times} x \times y \times y)$$

$$= \underline{3 \times} x\, [x + (2 \times x \times y) + (3 \times y \times y)]$$

$$= 3x\,(x + 2xy + 3y^2)$$

$$\therefore\ 3x^2 + 6x^2y + 9xy^2 = 3x\,(x + 2xy + 3y^2) \qquad \text{(} 3x \text{ समान गुणनखण्ड लेने पर)}$$

यह कीजिए :

गुणनखण्ड कीजिए: (i) $9a^2 - 6a$ (ii) $15a^3b - 35ab^3$ (iii) $7lm - 21lmn$

12.4 पदों के समूहन द्वारा गुणनखण्डन

व्यंजक $ax + bx + ay + by$ को ध्यान से देखिए। तुम जानोगे कि प्रथम दो पदों में समान गुणनखण्ड 'x' और अंतिम दो पदों में समान गुणनखण्ड 'y' है। किन्तु सभी पदों में एक भी समान गुणनखण्ड नहीं है। हम देखेंगे कि ऐसे व्यंजक के हम कैसे गुणनखण्ड कर सकते है।

पदों का समूहन करने पर हमें प्राप्त होता है $(ax + bx) + (ay + by)$

$$(ax + bx) + (ay + by) = x\,(a+b) + y(a+b) \quad \text{(प्रत्येक समूह से समान गुणनखण्ड बाहर लेने पर)}$$

$$= (a+b)(x+y) \quad \text{(समूहों से समान गुणनखण्ड बाहर लेने पर)}$$

व्यंजक $ax + bx + ay + by$ को अब इसके गुणनखण्डों के गुणा के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। गुणनखण्ड $(a+b)$ और $(x+y)$ हैं जो अलघुकृत है।

ऊपर के व्यंजक को दूसरे समूहन पद्धति द्वारा निम्न प्रकार से गुणनखण्ड कर सकते हैं।

$$ax + ay + bx + by = (ax + ay) + (bx + by)$$

$$= a\,(x + y) + b\,(x + y)$$

$$= (x + y)\,(a + b)$$

ध्यान दीजिए कि क्रम के अलावा गुणनखण्ड समान हैं।

यह कीजिए :

गुणनखण्ड कीजिए : (i) $5xy + 5x + 4y + 4$ (ii) $3ab + 3a + 2b + 2$

उदाहरण 3: गुणनखण्ड कीजिए : $6ab - b^2 - 2bc + 12ac$

हल : सोपान 1: सभी पदों समान गुणनखण्ड है या नहीं की जाँच कीजिए।

सोपान 2: प्रथम दो पदों का समूहन करने पर हमें प्राप्त होता है।

$6ab - b^2 = b(6a - b)$ ——— I

ध्यान दीजिए कि व्यंजक में अंतिम दो पदों का क्रम बदलने की तुम्हें आवश्यकता है। जैसे $12ac - 2bc$.

इस तरह $12ac - 2bc = 2c(6a - b)$ ——— II

सोपान 3: I और II का संयोजन करने से

$6ab - b^2 - 2bc + 12ac = b(6a - b) + 2c(6a - b)$

$= (6a - b)(b + 2c)$ समान गुणनखण्ड $(6a - b)$ बाहर लेने पर

अत: $6ab - b^2 - 2bc + 12ac$ के गुणनखंड $(6a - b)$ और $(b + 2c)$

अभ्यास - 12.1

1. दिए गए पदों में समान गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

(i) $8x, 24$ (ii) $3a, 21ab$ (iii) $7xy, 35x^2y^3$ (iv) $4m^2, 6m^2, 8m^3$

(v) $15p, 20qr, 25rp$ (vi) $4x^2, 6xy, 8y^2x$ (vii) $12x^2y, 18xy^2$

2. निम्न व्यंजकों के गुणनखण्ड कीजिए।

(i) $5x^2 - 25xy$ (ii) $9a^2 - 6ax$ (iii) $7p^2 + 49pq$

(iv) $36a^2b - 60a^2bc$ (v) $3a^2bc + 6ab^2c + 9abc^2$

(vi) $4p^2 + 5pq - 6pq^2$ (vii) $ut + at^2$

3. निम्न के गुणनखण्ड कीजिए।

(i) $3ax - 6xy + 8by - 4bx$ (ii) $x^3 + 2x^2 + 5x + 10$

(iii) $m^2 - mn + 4m - 4n$ (iv) $a^3 - a^2b^2 - ab + b^3$ (v) $p^2q - pr^2 - pq + r^2$

12.5 सर्वसमिकाओं का उपयोग से गुणन-खण्डन करना :

हम जानते हैं कि $(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) \equiv a^2 - b^2$ यह बीजगणितीय सर्वसमकाएँ हैं।

उदाहरण 4: गुणनखण्ड कीजिए : $x^2 + 10x + 25$

हल: दिए हुए व्यंजक में तीन पद है और प्रथम और तृतीय पद पूर्ण वर्ग है। अर्थात x^2 और 25 (5^2). मध्य पद का चिह्न धनात्मक है। यह सूचित करता है कि इसे $a^2 + 2ab + b^2$ के रूप में लिखा जा सकता है,

इसलिए $x^2 + 10x + 25 = (x)^2 + 2\,(x)\,(5) + (5)^2$

इसकी $a^2 + 2ab + b^2$ के साथ तुलना करने पर, यह सर्वसमिका के L.H.S. के बराबर है अर्थात $(a+b)^2$ यहाँ $a = x$ और $b = 5$

$x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2 = (x+5)\,(x+5)$

उदाहरण 5: गुणनखण्ड कीजिए :$16z^2 - 48z + 36$

हल : दिए गए व्यंजक से समान संख्यात्मक गुणनखण्ड बाहर लेने पर हमें प्राप्त होते हैं,

$16z^2 - 48z + 36 = (4 \times 4z^2) - (4 \times 12z) + (4 \times 9) = 4(4z^2 - 12z + 9)$

ध्यान दीजिए कि $4z^2 = (2z)^2$; $9 = (3)^2$ और $12z = 2\,(2z)\,(3)$

$4z^2 - 12z + 9 = (2z)^2 - 2\,(2z)\,(3) + (3)^2$ क्योंकि $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

$= (2z-3)^2$

तुलना करने पर, $16z^2 - 48z + 36 = 4(4z^2 - 12z + 9) = 4\,(2z-3)^2$

$= 4(2z-3)(2z-3)$

उदाहरण 6: गुणनखण्ड कीजिए :$25p^2 - 49q^2$

हल : हम जानते हैं कि व्यंजक, दो पूर्ण वर्गों में अंतर है।

अर्थात व्यंजक $a^2 - b^2$ के रूप में है।

अतः सर्वसमिका $a^2 - b^2 = (a+b)\,(a-b)$ प्रयुक्त कर सकते हैं।

$25p^2 - 49q^2 = (5p)^2 - (7q)^2$

$= (5p + 7q)\,(5p - 7q)$ [$\because a^2 - b^2 = (a+b)\,(a-b)$]

इसलिए, $25p^2 - 49q^2 = (5p + 7q)\,(5p - 7q)$

उदाहरण 7: गुणनखण्ड कीजिए :$48a^2 - 243b^2$

हल : हम देखते हैं कि दोनों पद पूर्ण वर्ग नहीं है किन्तु दोनों में समान गुणनखण्ड '3'हैं।

अर्थात $48a^2 - 243b^2 \quad = 3\,[16a^2 - 81b^2]$

$= 3\,[(4a)^2 - (9b)^2] \quad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$= 3\,[\,(4a + 9b)\,(4a - 9b)]$

$= 3\,(4a + 9b)\,(4a - 9b)$

उदाहरण 8: गुणनखण्ड कीजिए : $x^2 + 2xy + y^2 - 4z^2$

हल : व्यंजक के प्रथम तीन पर $(x + y)^2$ के रूप में और चतुर्थ पद पूर्ण वर्ग है।

अतः $x^2 + 2xy + y^2 - 4z^2 \quad = (x + y)^2 - (2z)^2$

$= [(x + y) + 2z]\,[(x + y) - 2z]$

$= (x + y + 2z)\,(x + y - 2z)$

$\boxed{a^2 - b^2 = (a+b)\,(a-b)}$

उदाहरण 9: गुणनखण्ड कीजिए : $p^4 - 256$

हल : $p^4 = (p^2)^2$ और $256 \quad = (16)^2$

इस तरह $p^4 - 256 \quad = (p^2)^2 - (16)^2$

$= (p^2 - 16)\,(p^2 + 16)$

$= (p+4)\,(p-4)\,(p^2 + 16)$ $\quad \boxed{p^2 - 16 = (p+4)\,(p-4)}$

12.6 $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ रूप के गुणनखण्ड :

ध्यान से देखिए, व्यंजक $x^2 + 12x + 35$, $x^2 + 6x - 27$, $a^2 - 6a + 8$, $3y^2 + 9y + 6$.... आदि। इन व्यंजकों को इसके पहले उपयोग की गई सर्वसमिकाओं द्वारा गुणनखंड नहीं कर सकते क्योंकि अचर पद पूर्ण वर्ग नहीं है।

माना कि $x^2 + 12x + 35$

इन सभी पदों का गुणनखंड के लिए समूहन नहीं कर सकते

हम मध्य पद और अचर को विभाजित करते हैं और समूह बनाने का प्रयत्न करते हैं ताकि यह सर्वसमिका $x^2 + (a + b)x + ab$ के रूप में रहे।

माना कि, दो गुणनखण्ड के गुणा के समान अचर लिखने के सभी संभव उपाय

$35 =$	1×35	$1 + 35 = 36$
	$(-1) \times (-35)$	$-1 - 35 = -36$
	5×7	$5 + 7 = 12$
	$(-5) \times (-7)$	$-5 - 7 = -12$

क़ौन-से युग्म का योग मध्य पद का गुणांक होगा? स्पष्टतः $5 + 7 = 12$ है।

$$\therefore\ x^2 + 12x + 35 = x^2 + (5+7)x + 35$$
$$= x^2 + 5x + 7x + 35 \quad (\because\ 12x = 5x + 7x)$$
$$= x(x+5) + 7(x+5) \quad \text{(समान गुणनखण्ड प्रत्येक लेकर)}$$
$$= (x+5)(x+7) \quad \text{(समान गुणनखण्ड } (x+5) \text{ बाहर लेकर)}$$

ऊपर की गई चर्चा से हम निर्णय ले सकते हैं कि व्यंजक जो $x^2 + (a+b)x + ab$ के रूप में लिख सकते हैं, के गुणनखण्ड $(x+a)(x+b)$ कर सकते हैं।

उदाहरण 10: गुणनखण्ड कीजिए : $m^2 - 4m - 21$

हल : सर्वसमिका $x^2 + (a+b)x + ab$ के साथ $m^2 - 4m - 21$ की तूलना करने पर हम जानते हैं कि $ab = -21$, और $a+b = -4$.

इसलिए, $(-7) + 3 = -4$ और $(-7)(3) = -21$

–21 के गुणनखण्ड और उनका योग	
$-1 \times 21 = -21$	$-1 + 21 = 20$
$1 \times (-21) = -21$	$1 - 21 = -20$
$\boxed{-7 \times 3 = -21}$	$\boxed{-7 + 3 = -4}$
$-3 \times 7 = -21$	$-3 + 7 = 4$

अतः $m^2 - 4m - 21 = m^2 - 7m + 3m - 21$
$$= m(m-7) + 3(m-7)$$
$$= (m-7)(m+3)$$

इसलिए $m^2 - 4m - 21 = (m-7)(m+3)$

उदाहरण 11: गुणनखण्ड कीजिए : $4x^2 + 20x - 96$

हल : हम देखते हैं कि सभी पदों में समान गुणनखण्ड 4 है।

इस प्रकार $4x^2 + 20x - 96 = 4[x^2 + 5x - 24]$

अब माना कि $x^2 + 5x - 24$
$$= x^2 + 8x - 3x - 24$$
$$= x(x+8) - 3(x+8)$$
$$= (x+8)(x-3)$$

–24 के गुणनखण्ड और उनका योग	
$-1 \times 24 = -24$	$-1 + 24 = 23$
$1 \times (-24) = -24$	$1 - 24 = -23$
$-8 \times 3 = -24$	$3 - 8 = -5$
$\boxed{-3 \times 8 = -24}$	$\boxed{-3 + 8 = 5}$

इसलिए $4x^2 + 20x - 96 = 4(x+8)(x-3)$

अभ्यास - 12.2

1. निम्न व्यंजक के गुणनखण्ड कीजिए :

(i) $a^2 + 10a + 25$ (ii) $l^2 - 16l + 64$ (iii) $36x^2 + 96xy + 64y^2$

(iv) $25x^2 + 9y^2 - 30xy$ (v) $25m^2 - 40mn + 16n^2$

(vi) $81x^2 - 198xy + 121y^2$ (vii) $(x+y)^2 - 4xy$ (संकेत: प्रथम $(x+y)^2$ का विस्तार कीजिए।)

(viii) $l^4 + 4l^2m^2 + 4m^4$

2. निम्न के गुणनखण्ड कीजिए:

(i) $x^2 - 36$ (ii) $49x^2 - 25y^2$ (iii) $m^2 - 121$
(iv) $81 - 64x^2$ (v) $x^2y^2 - 64$ (vi) $6x^2 - 54$
(vii) $x^2 - 81$ (viii) $2x - 32x^5$ (ix) $81x^4 - 121x^2$
(x) $(p^2 - 2pq + q^2) - r^2$ (xi) $(x + y)^2 - (x - y)^2$

3. व्यंजकों के गुणनखण्ड कीजिए :

(i) $lx^2 + mx$ (ii) $7y^2 + 35Z^2$ (iii) $3x^4 + 6x^3y + 9x^2Z$
(iv) $x^2 - ax - bx + ab$ (v) $3ax - 6ay - 8by + 4bx$ (vi) $mn + m + n + 1$
(vii) $6ab - b^2 + 12ac - 2bc$ (viii) $p^2q - pr^2 - pq + r^2$ (ix) $x(y+z) - 5(y+z)$

4. निम्न के गुणनखण्ड कीजिए :

(i) $x^4 - y^4$ (ii) $a^4 - (b+c)^4$ (iii) $l^2 - (m-n)^2$
(iv) $49x^2 - \frac{16}{25}$ (v) $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$ (vi) $4(a+b)^2 - 9(a-b)^2$

5. निम्न व्यंजकों के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए :

(i) $a^2 + 10a + 24$ (ii) $x^2 + 9x + 18$ (iii) $p^2 - 10q + 21$ (iv) $x^2 - 4x - 32$

12.7 बीजगणितीय व्यंजकों का भाग :

हम जानते हैं कि गुणा कि विलोम संक्रिया भाग है।

माना कि $3x \times 5x^3 = 15x^4$

तब $15x^4 \div 5x^3 = 3x$ और $15x^4 \div 3x = 5x^3$

इसी तरह माना कि $6a(a+5) = 6a^2 + 30$

इसलिए $(6a^2 + 30) \div 6a = a + 5$

और $(6a^2 + 30a) \div (a+5) = 6a.$

12.8 एकपदी को दूसरे एकपदी से भाग :

मान लीजिए $24x^3 \div 3x$

$\therefore\ 24x^3 \div 3x$

$$= \frac{2\times2\times2\times3\times x\times x\times x}{3\times x}$$

$$= \frac{(3\times x)(2\times2\times2\times x\times x)}{(3\times x)} = 8x^2$$

उदाहरण 12: भाग कीजिए :

(i) $70x^4 \div 14\,x^2$ (ii) $4x^3y^3z^3 \div 12xyz$

हल : (i) $70x^4 \div 14x^2 = \dfrac{2\times5\times7\times x\times x\times x\times x}{2\times7\times x\times x}$

$= \dfrac{5\times x\times x}{1}$

$= 5x^2$

(ii) $4x^3y^3z^3 \div 12xyz = \dfrac{4\times x\times x\times x\times y\times y\times y\times z\times z\times z}{12\times x\times y\times z}$

$= \dfrac{1}{3}x^2y^2z^2$

12.9 व्यंजक को एकपदी से भाग :

मान लीजिए,

द्विपदी $6x^4+10x^3+8x^2$ को एकपदी $2x^2$ से भाग देना है।

$6x^4 + 10x^3 + 8x^2 = [2 \times 3 \times x \times x \times x \times x] + [2 \times 5 \times x \times x \times x] + [2 \times 2 \times 2 \times x \times x]$

$= \cancel{(2x^2)}(3x^2) + \cancel{(2x^2)}(5x) + \cancel{2x^2}(4)$

$= 2x^2\,[3x^2 + 5x + 4]$

ध्यान दीजिए कि समान गुणनखण्ड $2x^2$ है।

इस प्रकार $(6x^4 + 10x^3 + 8x^2) \div 2x^2$

$= \dfrac{6x^4+10x^3+8x^2}{2x^2} = \dfrac{2x^2(3x^2+5x+4)}{2x^2}$

$= (3x^2 + 5x + 4)$

विकल्पत: निरसन पद्धति से व्यंजक के प्रत्येक पद को एकपदी से भाग दे सकते हैं।

$(6x^4 + 10x^3 + 8x^2) \div 2x^2$

$= \dfrac{6x^4}{2x^2}+\dfrac{10x^3}{2x^2}+\dfrac{8x^2}{2x^2}$

$= 3x^2 + 5x + 4$

यहाँ हम अंश में व्यंजक के प्रत्येक पद को हर में एक पदी से भाग देते है।

उदाहरण 13: $30\,(a^2bc + ab^2c + abc^2)$ को $6abc$ से भाग दीजिए।

हल : $30\,(a^2bc + ab^2c + abc^2)$

$= 2 \times 3 \times 5\,[(a \times a \times b \times c) + (a \times b \times b \times c) + (a \times b \times c \times c)]$

$= 2 \times 3 \times 5 \times a \times b \times c\;(a + b + c)$

इस प्रकार $30\,(a^2bc + ab^2c + abc^2) \div 6abc$

$$= \frac{2\times3\times5\times abc(a+b+c)}{2\times3\times abc}$$

$= 5\,(a + b + c)$

विकल्पत: $30\,(a^2bc + ab^2c + abc^2) \div 6abc$

$$= \frac{30a^2bc}{6abc} + \frac{30ab^2c}{6abc} + \frac{30abc^2}{6abc}$$

$= 5a + 5b + 5c$

$= 5\,(a + b + c)$

12.10 व्यंजक को व्यंजक से भाग :

मान लीजिए $(3a^2 + 21a) \div (a+7)$

प्रथम $3a^2 + 21a$ के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए और हर के साथ गुणनखण्ड की तुलना कीजिए।

$$(3a^2 + 21a) \div (a+7) = \frac{3a^2+21a}{a+7}$$

$$= \frac{3a(a+7)}{a+7} = 3a$$

$= 3a$

उदाहरण 14: $39y^3(50y^2 - 98)$ by $26y^2(5y+7)$ से भाग दीजिए।

हल : $39y^3(50y^2 - 98) = 3 \times 13 \times y \times y \times y \times [2\,(25y^2 - 49)]$

$= 2 \times 3 \times 13 \times y \times y \times y \times [(5y)^2 - (7)^2]$ $\boxed{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$

$= 2 \times 3 \times 13 \times y \times y \times y \times [(5y + 7)\;(5y - 7)]$

$= 2 \times 3 \times 13 \times y \times y \times y \times (5y + 7)\,(5y - 7)$

तथा $26y^2(5y + 7) = 2 \times 13 \times y \times y \times ((5y + 7)$

$\therefore \quad [\,39y^3(50y^2 - 98)\,] \div [\,26y^2(5y + 7)\,]$

$$= \frac{[2\times3\times13\times y\times y\times y(5y+7)(5y-7)]}{[2\times13\times y\times y\times(5y+7)]}$$

$= 3y\,(5y - 7)$

उदाहरण 15: $m^2 - 14m - 32$ by $m+2$ से भाग दीजिए।

हल : हमें ज्ञात है $m^2 - 14m - 32 \quad = m^2 - 16m + 2m - 32$

$= m(m - 16) + 2(m - 16)$

$= (m - 16)(m+2)$

$(m^2 - 14m - 32) \div m+2 = (m - 16)(m+2) \div (m+2)$

$= (m - 16)$

उदाहरण 16: $42(a^4 - 13a^3 + 36a^2)$ by $7a(a - 4)$ से भाग दीजिए।

हल : $42(a^4 - 13a^3 + 36a^2) = 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times (a^2 - 13a + 36)$

$= 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times (a^2 - 9a - 4a + 36)$

$= 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times [a(a - 9) - 4(a - 9)]$

$= 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times [(a - 9)(a - 4)]$

$= 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times (a - 9)(a - 4)$

$42(a^4 - 13a^3 + 36a^2) \div 7a(a - 4) = 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times (a - 9)(a - 4) \div 7a(a - 4)$

$= 6a(a - 9)$

उदाहरण 17: $x(3x^2 - 108)$ by $3x(x - 6)$ से भाग दीजिए।

हल : $x(3x^2 - 108) = x \times [\,3(x^2 - 36)]$

$= x \times [\,3(x^2 - 6^2)]$

$= x \times [3(x + 6)(x - 6)]$

$= 3 \times x \times [\,(x + 6)(x - 6)]$

$x(3x^2 - 108) \div 3x(x - 6) = 3 \times x \times [\,(x + 6)(x - 6)] \div 3x(x - 6)$

$= (x + 6)$

अभ्यास - 12.3

1. निम्न भाग कीजिए :

   (i) $48a^3$ by $6a$ (ii) $14x^3$ by $42x^2$

   (iii) $72a^3b^4c^5$ by $8ab^2c^3$ (iv) $11xy^2z^3$ by $55xyz$ (v) $-54l^4m^3n^2$ by $9l^2m^2n^2$

2. दिए गए बहुपदी को दी गई एक पदी से भाग दीजिए :

   (i) $(3x^2 - 2x) \div x$ (ii) $(5a^3b - 7ab^3) \div ab$

   (iii) $(25x^5 - 15x^4) \div 5x^3$ (iv) $(4l^5 - 6l^4 + 8l^3) \div 2l^2$

   (v) $15\,(a^3b^2c^2 - a^2b^3c^2 + a^2b^2c^3) \div 3abc$ (vi) $(3p^3 - 9p^2q - 6pq^2) \div (-3p)$

   (vii) $(\frac{2}{3}a^2b^2c^2 + \frac{4}{3}ab^2c^2) \div \frac{1}{2}abc$

3. निम्न भाग हल कीजिए :

   (i) $(49x - 63) \div 7$ (ii) $12x\,(8x - 20) \div 4(2x - 5)$

   (iii) $11a^3b^3(7c - 35) \div 3a^2b^2(c - 5)$

   (iv) $54lmn\,(l + m)\,(m + n)\,(n + l) \div 81mn\,(l + m)\,(n + l)$

   (v) $36\,(x + 4)\,(x^2 + 7x + 10) \div 9\,(x + 4)$ (vi) $a\,(a + 1)\,(a + 2)\,(a + 3) \div a\,(a + 3)$

4. व्यंजकों के गुणनखण्ड किजिए और उन्हें निर्देशानुसार भाग दीजिए।

   (i) $(x^2 + 7x + 12) \div (x + 3)$ (ii) $(x^2 - 8x + 12) \div (x - 6)$

   (iii) $(p^2 + 5p + 4) \div (p + 1)$ (iv) $15ab\,(a^2 - 7a + 10) \div 3b\,(a - 2)$

   (v) $15lm\,(2p^2 - 2q^2) \div 3l\,(p + q)$ (vi) $26z^3(32z^2 - 18) \div 13z^2(4z - 3)$

12.11 सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए :

कक्षा परियोजना 1 : श्रीलेखा ने दिया गया समीकरण नीचे बताये जैसे हल किया।

$3x + 4x + x + 2x = 90$

$9x = 90$ इसलिए $x = 10$

हल के सत्यता के बारे में क्या कह सकते है?

क्या तुम पहचान सकते हो कि श्रीलेखा ने कहाँ पर गलती की?

> यदि किसी पद का गुणांक 1 हो तो उसे नहीं लिखते है। परंतु सजातीय पदों का योग करते समय हम इसे योग में जोड़ते है।

कक्षा परियोजना 2 : शरयू ने निम्न प्रकार से किया :

$x = -4$ के लिए, $7x = 7 - 4 = -3$

> स्मरण रखिए कि ऋणात्मक संख्या का गुणा करते समय कोष्टकों का उपयोग करना चाहिए ।

कक्षा परियोजना 3 : शरयू और दीपू ने बीजगणितीय व्यंजकों का गुणा निम्न पद्धतियों द्वारा किया। किसका गुणा सही है, जाँच कीजिए।

शरयू	**दीपू**
(i) $3\,(x-4) = 3x - 4$	$3\,(x-4) = 3x - 12$
(ii) $(2x)^2 = 2x^2$	$(2x)^2 = 4x^2$
(iii) $(2a-3)\,(a+2) = 2a^2 - 6$	$(2a-3)\,(a+2) = 2a^2 + a - 6$
(iv) $(x+8)^2 = x^2 - 64$	$(x+8)^2 = x^2 + 16x + 64$

कक्षा परियोजना 4: सुमंत ने भाग इस प्रकार किया : $(a+5) \div 5 = a+1$

उसके दोस्त दिनेश ने वही भाग इस प्रकार किया :$(a+5) \div 5 = a/5 + 1$

और उसकी दोस्त पावनी ने इस प्रकार किया :$(a+5) \div 5 = a$

अभ्यास - 12.4

त्रुटियाँ ज्ञात कीजिए और निम्नलिखित गणितीय वाक्यों को सही कीजिए।

(i) $3(x-9) = 3x - 9$

(ii) $x(3x+2) = 3x^2 + 2$

(iii) $2x + 3x = 5x^2$

(iv) $2x + x + 3x = sx$

(v) $4p + 3p + 2p + p - 9p = 0$

(vi) $3x + 2y = 6xy$

(vii) $(3x)^2 + 4x + 7 = 3x^2 + 4x + 7$

(viii) $(2x)^2 + 5x = 4x + 5x = 9x$

(ix) $(2a+3)^2 = 2a^2 + 6a + 9$

(x) मान रखिए $x = -3$

(a) $x^2 + 7x + 12 = (-3)^2 + 7(-3) + 12 = 9 + 4 + 12 = 25$

(b) $x^2 - 5x + 6 = (-3)^2 - 5(-3) + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$

(c) $x^2 + 5x = (-3)^2 + 5(-3) + 6 = -9 - 15 = -24$

(xi) $(x-4)^2 = x^2 - 16$

(xii) $(x+7)^2 = x^2 + 49$

(xiii) $(3a+4b)\,(a-b) = 3a^2 - 4a^2$

(xiv) $(x+4)\,(x+2) = x^2 + 8$

(xv) $(x-4)(x-2) = x^2 - 8$ (xvi) $5x^3 \div 5x^3 = 0$

(xvii) $2x^3 + 1 \div 2x^3 = 1$ (xviii) $3x + 2 \div 3x = \dfrac{2}{3x}$

(xix) $3x + 5 \div 3 = 5$ (xx) $\dfrac{4x+3}{3} = x + 1$

हमने क्या चर्चा की

1. गुणनखंडन किसी व्यंजक को उसके गुणकों के गुणा के रूप में व्यक्त करने की प्रक्रिया है।
2. वह खंड जिसे गुणनखंडों के गुणा के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता अपरिवर्तनीय गुणनखंड कहलाते हैं।
3. वे व्यंजक जो इस रूप में व्यक्त हैं-
   $a^2 + 2ab + b^2$; $a^2 - 2ab + b^2$; $a^2 - b^2$ और $x^2 + (a+b)x + ab$ इन्हें गुणनखंडों के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।
4. यदि व्यंजक $x^2 + (a+b)\ x + ab$ रूप में है तो इसका गुणनखंड $(x+a)(x+b)$ होगा।
5. गुणा, भाग का व्युत्क्रम होता है। यह संकल्पना बीजगणितीय व्यंजकों पर भी लागू होती है।

गोल्ड बच का अनुमान

गोल्ड बच ने अपने निरीक्षण में यह अनुमान लगाया कि प्रत्येक विषम संख्या या तो अविभाज्य संख्या या अविभाज्य संख्याओं का योग और किसी वर्ग का दोगुना होती है।

जैसे $21 = 19 + 2$ or $13 + 8$ or $3 + 18$.

इसे 9000 तक के लिए दर्शाया जा सकता है, केवल उसका कथन इस पर लागू नहीं होता

$5777 = 53 \times 109$ और $5993 = 13 \times 641$,

जो कि न अविभाज्य संख्या हैं, न ही अविभाज्य संख्याओं का योग हैं और न ही किसी वर्ग का दोगुना हैं।

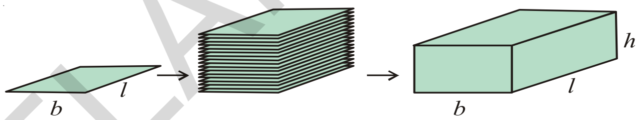
अध्याय 13

3-D को 2-D में देखना (VISUALISING 3D IN 2D)

13.0 परिचय

हम3-विनिमय संसार में रहते हैं। हमारी चारों ओर वस्तुओं की आकृति 3 विनिमय की होती हैं। हम 2-D और 3-D आकृतियों को देखकर उनकी भिन्नता को पहचान सकते हैं। दीवार पर लगे एक चित्र (पोस्टर) को देखिए। इसका तल आयताकार है। इसके कितने मापन हैं? इसके 2 मापन हैं।वे हैं लम्बाई और चौड़ाई। एक पुस्तक को देखिए। पुस्तक की आकृति कैसी है? इसकी आकृति घनाब जैसी होती है। इसके 3 मापन हैं। लम्बाई और चौड़ाई के साथ एक और मापन ऊँचाई भी होता है।

एक त्रिभुज, वर्ग, आयत 2-मापन वाले सरल चित्र हैं। घन और घनाभ 3 मापनवाले ठोस वस्तुएँ हैं। 2-D वस्तुओं



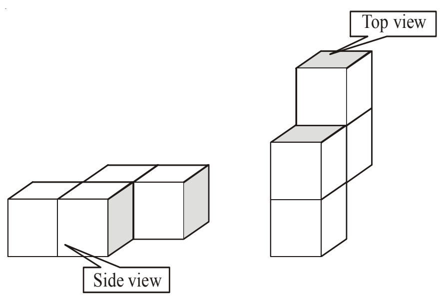
को एक के ऊपर एक व्यवस्थित करने पर वह कुछ स्थान घेरता है और चित्र में दर्शाये जैसा 3-D वस्तु बनाना हैं। इसका आयतन भी होता हैं।

इसे कीजिए।

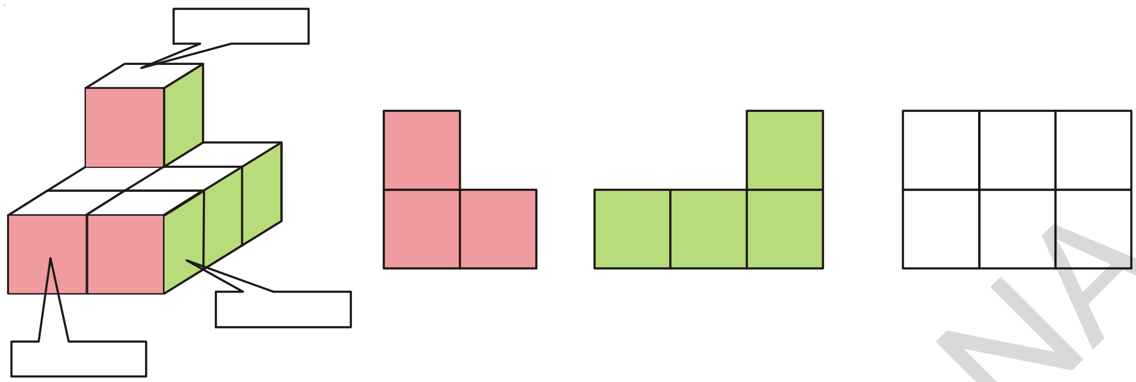
1. कुछ 3- विनिमय चित्रों के नाम बताइए।
2. कुछ 2-D वस्तुओं के उदाहरण दीजिए।
3. अपनी पुस्तक में पतंग का चित्र उतारिए। यह चित्र 2-D है या 3-D है?
4. घन और घनाभ आकृति की कुछ वस्तुओं को पहचानिये।
5. एक वृत्त और गोले के कितने मापन होते हैं?

13.1 घन से बने 3-D वस्तुएँ

निम्न ठोस आकृतियों का निरीक्षण कीजिए।



दोनों का निर्माण चार इकाइ घनों की व्यवस्था से हुई हैं। यदि हम भिन्न दिशाओं से इनका निरीक्षण करे, तो यह भिन्न होते हैं। परन्तु वस्तु वही है। इसी प्रकार एक ठोस को विभिन्न दिशाओं से देखने पर वह भिन्न आकृतियों में दिखाई देता हैं। उदाहरण के लिए

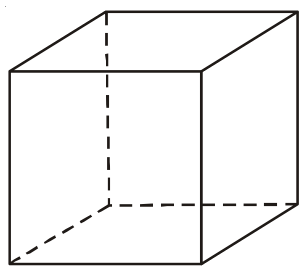


यह किजिए

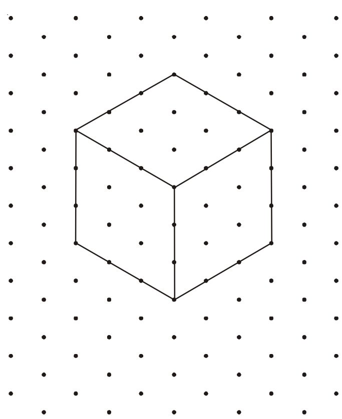
उपर्युक्त चित्रों में ऊपर और नीचे के तलों के क्षेत्र पर और परिमिति कैसे ज्ञात करसकते हैं?

13.2 2-Dके चित्रों पर 3-D के चित्रों का प्रदर्शण

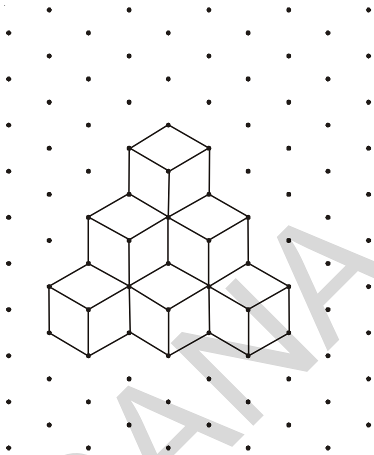
जो 3-D चित्रों को हम कागज़ से बनाते हैं, 2-D हैं। वास्तव में हम कागज़ पर केवल दो मापन को ही सूचित कर सकते हैं। तीसरा मापन केवल हमारी कल्पना है। हमें, एक 3-D घनाकार वस्तु को संलग्न चित्र जैसा दर्शानि का अभ्यास हैं। घन के सभी किनारों की लम्बाई समान हैं। परंतु संलग्न चित्र में, वे समान नहीं हैं। इस चित्र को हमारी कल्पना के अनुसार बनाया गया है। इस समस्या का हल निकालने के लिए हम आइसोमेट्रिक बिंदु कागज़ का उपयोग करेंगे। इसमें हम 3-D की ठोस वस्तुओं की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई को वस्तु के माप से सूचित करसकते हैं।



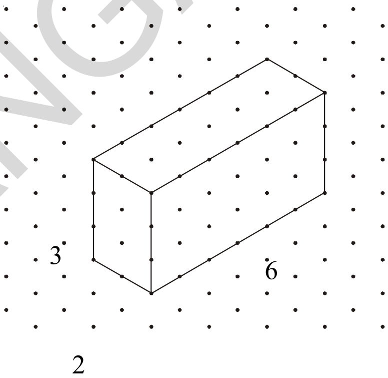
उदाहरण 1 : संलग्न चित्र में घनों की संख्या को पहचानिए।



हल : घन के तीन परत हैं। ऊपर की परत में केवल एक ही घन है। दूसरी परत में 3 घन हैं। (1 छिपा हुआ है।) नीचे की परत में 6 घन हैं। (3छिपे हुए हैं।) तो घनों की कुल संख्या $= 1 + 3 + 6 = 10$ घन



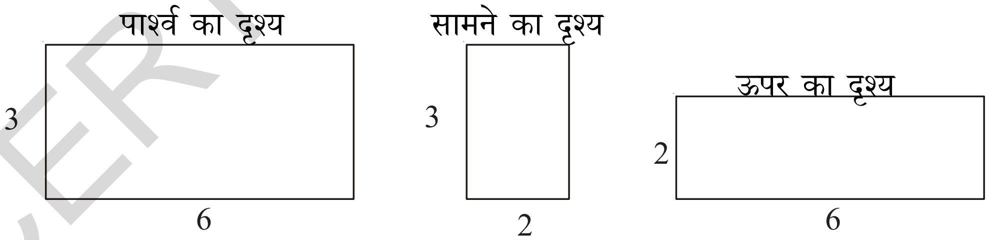
उदाहरण 2 : संलग्न चित्र में घनाभ के मापन ज्ञात कीजिए। दो क्रमागत बिंदुओं की दूरी को एक इकाई मानना है। अनुपाती मापन से पार्श्व का दृश्य ऊपर का दृश्य और सामने के दृश्य के चित्र भी बनाइए।



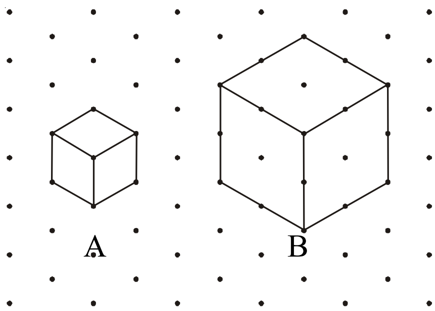
हल : घनात की लम्बाई $l = 6$ इकाई

घनात की चौड़ाई $b = 2$ इकाई

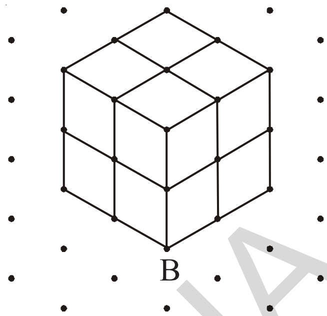
घनात की ऊँचाई $h = 3$ इकाई



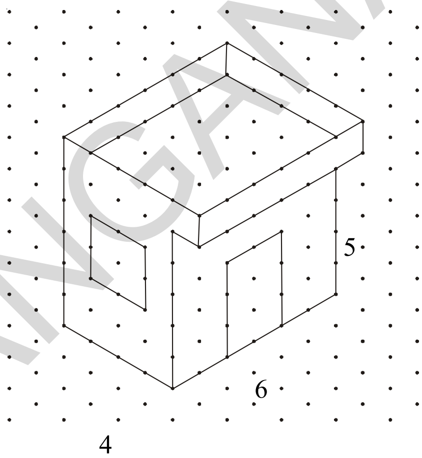
उदाहरण 3 : संलग्न चित्र को देखिए। A और B में इकाई घनों की संख्या ज्ञात करो और उनका अनुपात भी ज्ञात करो।



हल : A. में केवल एक ही घन है। चित्र B में, सभी भुजाओं के समानांतर रेखाएँ खींचकर उसे इकाई घनों में विभाजित करके गिनेंगे। इसमें दो परत हैं और प्रत्येक परत में चार इकाई घन हैं। तो घनों की संख्या B = 8 और घनों का अनुपात A और B = 1 : 8.



उदाहरण 4 : संलग्न चित्र में आइसोमेट्रिक बिंदु कागज़ पर एक घर का चित्र है। घर की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई का मापन ज्ञात कीजिए। पटिया का प्रक्षेपण आगे की ओर है। पटिया का क्षेत्रफल ज्ञात करो।



हल : घर की लम्बाई = 6 इकाई

घर की चौड़ाई = 4 इकाई

घर की ऊँचाई = 5 इकाई

पटिया को 1 इकाई से आगे प्रक्षेपित किया गया।

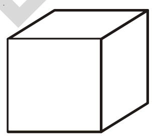
पटिया के मापन = 5×6 इकाई

पटिया का क्षेत्रफल= $5 \times 6 = 30$ वर्ग इकाई

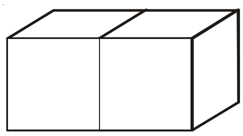
अभ्यास - 13.1

1. निम्न 3-D चित्रों को आइसोमेट्रिक बिंदु कागज़ पर उतारिए।

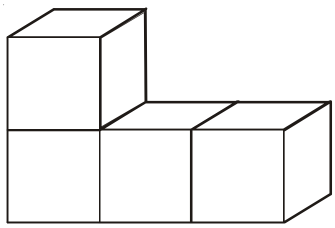
(i)



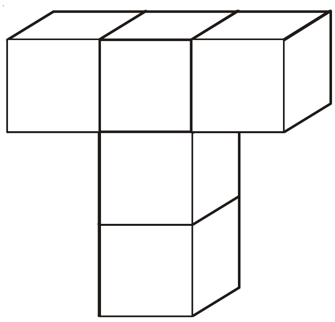
(ii)



(iii)

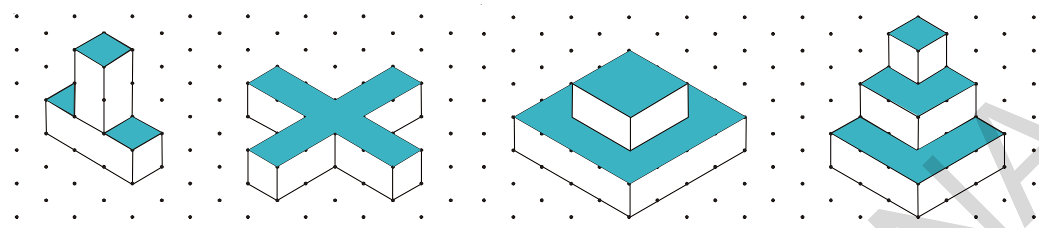


(iv)



2. 5 इकाई × 3 इकाई × 2इकाई मापन से आइसोमेट्रिक बिंदु कागज़ पर घनाभ का चित्र बनाइए।

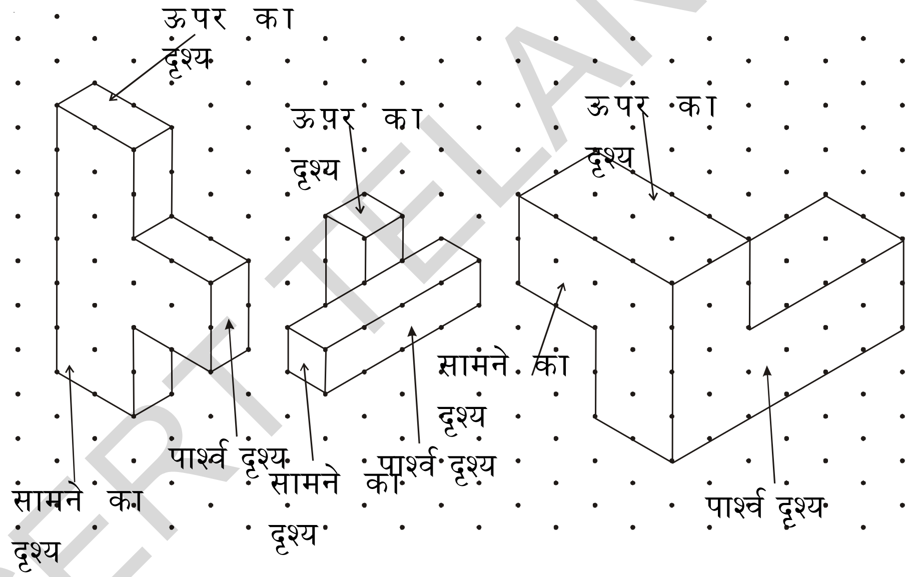
3. निम्न 3-D चित्रों में इकाई घनों की संख्या ज्ञात कीजिए।



(i) (ii) (iii) (iv)

4. प्रश्न 3 में दिये गए 3-D चित्र में छायांकित क्षेत्रों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

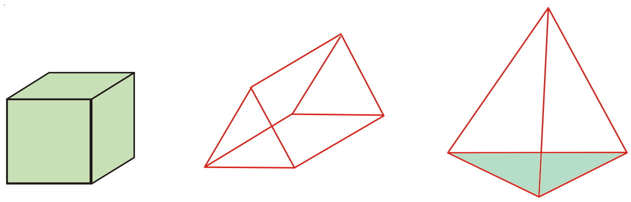
5. दो क्रमगत बिंदुओं की बीच की दूरी को 1 से.मी. मानते हुए निम्न 3-D चित्रों के सामने का दृश्य, पार्श्व दृश्य और ऊपर दृश्य के चित्र बनाइए।



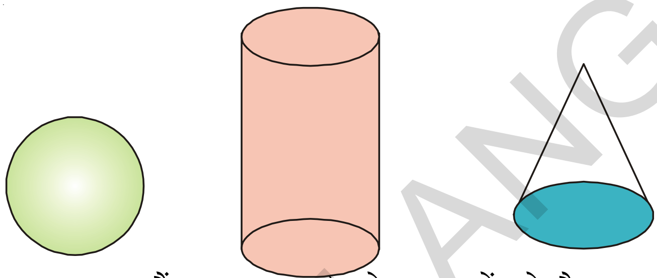
13.3 विभिन्न ज्यामितीय ठोस

हमारे परिसरों में हम विभिन्न प्रकार के ठोस वस्तुओं को देखते हैं। इन में कुछ वस्तुओं के फलक वक्राकार और कुछ वस्तुओं के फलक सपाट होते हैं। डिब्बे, पुस्तक, पासा जैसे 3-D वस्तुओं के फलक सपाट होते हैं। गेंद, नली आदि। इसी गुण के आधार पर हम 3-D आकृतियों को बहुलीय एवं गैर बहुलीय में वर्गीकृत कर सकते हैं।

निम्न ठोस का निरीक्षण कीजिए।



ऊपर दिये गए ठोस में क्या किसी का फलक वक्राकार हैं? नहीं, सभी के सपाट तल हैं।इस प्रकार के ठोस वस्तुएँ जिन के फलक बहुभुजीय होते हैं, उन्हें बहुतलीय कहते हैं। (इसका एकवचन बहुफलक है।) अब निम्न चित्रों का निरीक्षण कीजिए।



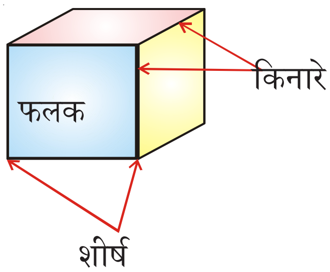
इन वस्तुओं के फ लक वक्राकार हैं। इस प्रकार के ठोस वस्तुओं को गैर बहुतलीय कहते हैं।

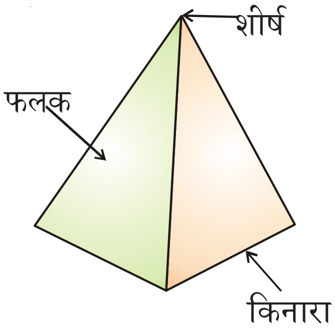
प्रयास कीजिए।

1. बहुफलक के तीन उदाहरण दीजिए।
2. गैर बहुफलक के तीन उदाहरण दीजिए।

13.4 3D-वस्तुओं के फलक, किनारे और शीर्ष (Faces, Edges, Vertices) :

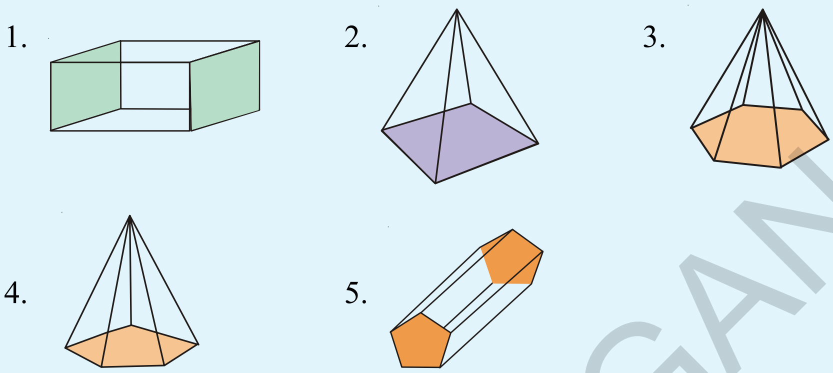
हमारे कमरे की दीवार, खिड़कियाँ, दरवाज़े, फर्श, छत, कोने आदि और मेज़, डिब्बों का निरीक्षण कीजिए। इनमें फलक सपाट हैं। सपाट फलक किनारों पर मिलते हैं। दो या अधिक किनारे कोनों पर मिलते हैं। प्रत्येक कोने को शीर्ष कहते हैं। एक घन को लेकर देखिये कि उसके फलक कहाँ पर मिलते हैं? इसके किनारे कहाँ मिलते हैं?





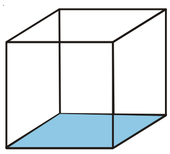
इन्हें कीजिए

दिये गए चित्रों के फलक, किनारे और शीर्षों को पहचानिए।

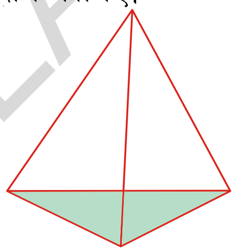


13.5 सम बहुफलक (Regula Polygon) :

निम्न आकृतियों के फलक, किनारे और शीर्षों का निरीक्षण कीजिए।

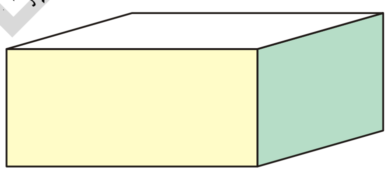


घन

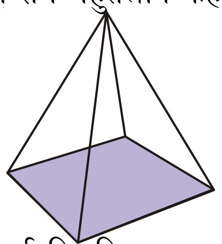


त्रिभुजाकार पिरामिड(चतुष्फलक)

ऊपर की दो वस्तुओं में दोनों के फलक समरूप हैं। उनके सभी किनारे समान हैं और समान किनारों की संख्या से शीर्ष निर्मित हुए हैं। इस प्रकार की ठोस वस्तुओं को सम बहुतलीय कहते हैं। निम्न चित्रों का निरीक्षण कीजिए।



घनाभ

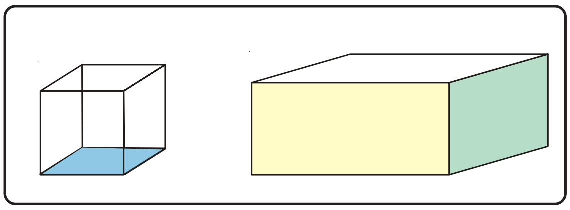


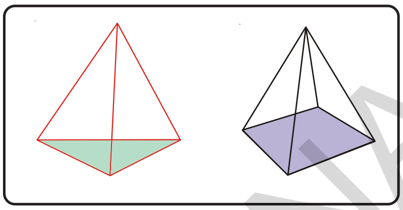
वर्ग पिरामिड

घनाभ गैर बहुतलीय है क्यों कि उसके सभी फलक समरूप नहीं हैं और वर्ग पिरामिड़ में एक शीर्ष का निर्माण 4 किनारों से हुआ और अन्य शीर्षों का निर्माण 3 किनारों से हुआ है। पिरामिड़ के सभी फलक समरूप नहीं हैं। इस लिए यह भी गैर बहुतलीय है। इस प्रकार की वस्तुओं को गैर-सम बहुतलीय कहते हैं।अतः बहुतलीय को सम बहुतलीय एवं गैर-सम बहुतलीय में वर्गीकृत किया जा सकता है।

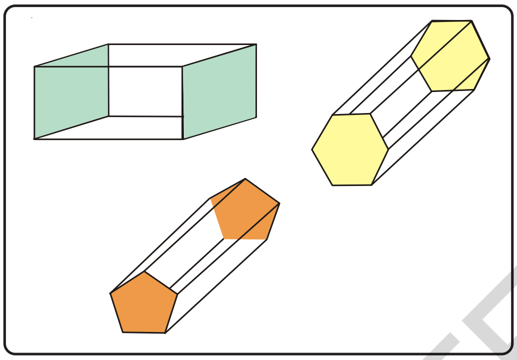
13.4.1 प्रिज़्म और पिरामिड

अब निम्न चित्रों का निरीक्षण कीजिए।

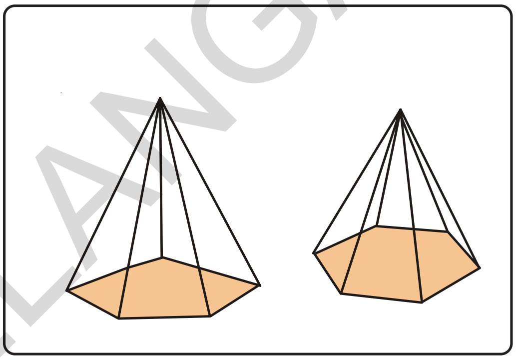




पहले बक्से में वस्तुओं के ऊपर और नीचे के फलक समान हैं। दूसरे बक्से में वस्तुओं का आधार भिन्न है परन्तु ऊपर शीर्ष सामान्य है। आइए हम इसी प्रकार के कुछ और वस्तुओं का निरीक्षण करें।



(a)



(b)

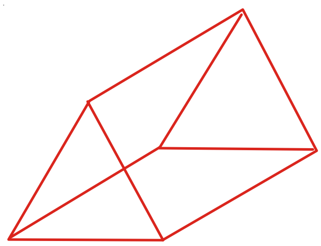
चित्र(a) में प्रत्येक वस्तु के दो समानांतर और समरूप बहुभुजीय फलक हैं और पार्श्य फलक आयत (या समानांतर चतुर्भुज हैं। चित्र (b) आधार बहुभुज और पार्श्य फलक त्रिभुज हैं, वे सभी एक सामान्य शीर्ष पर मिलते हैं।

एक ठोस वस्तु जिसमें दो समानान्तर और समरूप बहुभुजीय फलक हो और जिसके पार्श्व फलक आयत या समानान्तर चतुर्भुज हो **"प्रिज़्म"** कहलाते हैं।

एक ठोस वस्तु जिसका आधार बहुभुज है और जिसके पार्श्य फलक त्रिभुजाकार फलक है, **"पिरामिड"** कहलाता है।

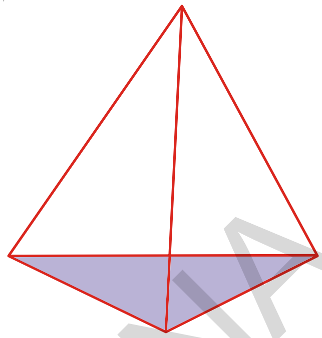
एक **"प्रिज़्म"** या **"पिरामिड"** उसके समानांतर और समरूप बहुभुजीय फलक या आधार के आकृति पर नामांकित किया जाता है।

A. त्रिभुजाकार प्रिज़्म



संलग्न चित्र में दो समरूप और समानान्तर फलक की आकृति क्या है? इसके दो समरूप और समानांतर फलक त्रिभुजाकार हैं और पार्श्य फलक समानांतर चतुर्भुज हैं। इसे त्रिभुजाकार प्रिज़्म कहते हैं। यदि आधार वर्ग है तो इसे प्रिज़्म कहते हैं। यदि आधार पंचभुज हैं तो इसे पंचभुजीय प्रिज़्म कहते हैं।

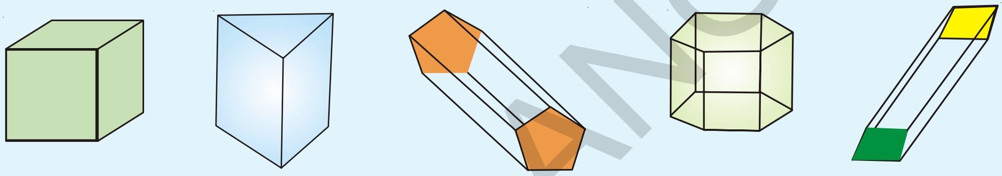
B. त्रिभुजाकार पिरामिड



वह पिरामिड जिसका आधार त्रिभुज हो तो त्रिभुजाकार पिरामिड कहलाता है। इसे चतुर्पार्शीय कहते हैं। (चतुर्पार्शीय का अर्थ = जिसमें चार फलक हों) यदि पिरामिड का आधार वर्ग हो तो उसे पंचभिुजीय पिरामिड कहते हैं।

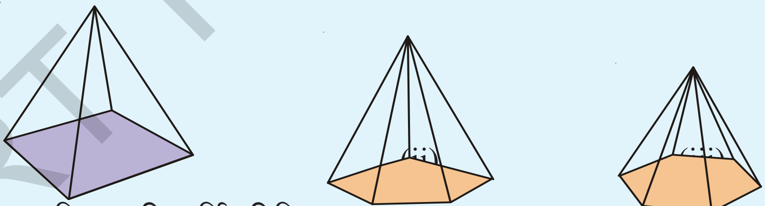
इसे कीजिए

1. निम्न प्रिज़्म के नाम लिखो।



(i) (ii) (iii) (iv) (v)

2. निम्न पिरामिड के नाम लिखो।



3. तालिका की पूर्ति कीजिए :

प्रिज़्म/पिरामिड के आधार के भुजाओं की संख्या	प्रिज़्म का नाम	पिरामिड का नाम
3 भुजाएँ		
4 भुजाएँ		
5 भुजाएँ		
6 भुजाएँ		
8 भुजाएँ		

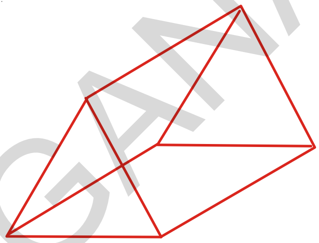
4. प्रिज़्म और पिरामिड के बीच अंतर समझाइए।

सोचिए और चर्चा कीजिए

यदि एक सम पिरामिड के बहुभुजीय आधार के भुजाओं की संख्या को बढाते जायें तो पिरामिड की आकृति क्या होगी?

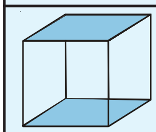
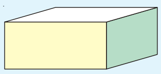
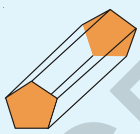
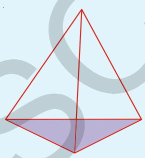
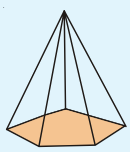
13.6 बहु फलक के किनारे, फलक और शीर्षों की संख्या:

आइए हम एक बहुफलक के फलक, किनारे और शीर्षों की संख्या गिनें।



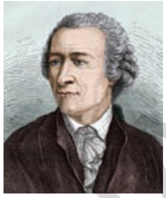
फलकों की संख्या	5 फलक
किनारों की संख्या	9 किनारे
शीर्षों की संख्या	6 शीर्षे

तालिका का निरीक्षण कर उसकी पूर्ति कीजिए।

वस्तु का चित्र	वस्तु का नाम	फलकों की संख्या(F)	शीर्षों की संख्या (V)	किनारों की संख्या (E)	F+V	E+2
	घन	6	8	12	6 + 8 = 14	12 + 2 = 14
	घनाभ					
	पंचभुजीय प्रिज़्म					
	चतुर्भुजीय पिरामिड					
	पंचभुजीय पिरामिड					

तालिका के आख़री दो स्तंभों के निरीक्षण से हम यह निष्कर्ष कर सकते हैं कि सभी बहुफलक के लिए

लियोनार्ड नामक गणितज्ञ ने सर्वप्रथम इस संबंध का निरीक्षण किया। इन्होंने यह बताया कि $F + V = E + 2$ इस संबंध को पिरामिड का "यूलर संबंध" कहते हैं।



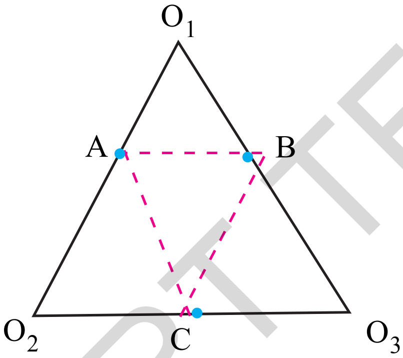
लियोनार्ड यूलर
(1707-1783)

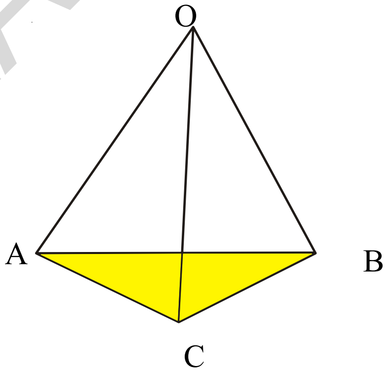
13.7 जाली चित्र (Net Diagrams)

एक जाली जित्र 2-D, में कंकाल रूपरेखा जैसा हैं, जिसे मोड़ने से यह शुध्द आकृति 3-D का परिणाम लेता है।

जाली चित्रों का प्रयोग करते हुए हम प्रिज़्म और पिरामिड बनासकते हैं। निम्न एक त्रिभुजाकार प्रिज़्म बनाने का कार्यकलाप दिया गया है। इनका निरीक्षण कीजिए।

एक कागज़ के टुकडे को लेकर, त्रिभुज की आकृति में काटिए। शीर्षों को A, B, C. चिह्न लगाइए।



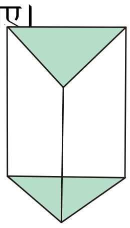


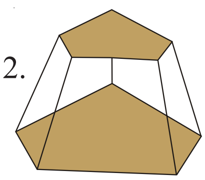
बिंदीकार रेखाएँ AB, BC, CA पर कागज़ को मोडिए और इनको तब तक उठाइए जब तक कि ये बिंदु O_1, O_2, O_3 को एक बिंदु (मानो O पर) मिले एक इससे AO_1, AO_2,से मिलता है, BO_1, BO_3से और CO_2, CO_3 से मिलता है।

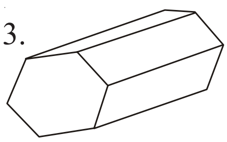
निर्मित वस्तु एक पिरामिड है। चित्र O_1, O_2, O_3 पिरामिड का जाली चित्र (Net Diagrams) होता है।

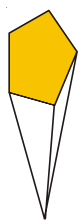
अभ्यास - 13.2

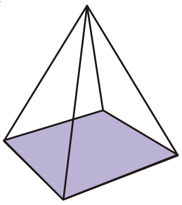
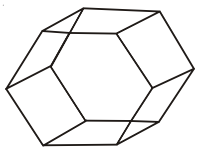
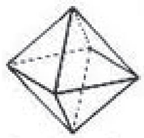
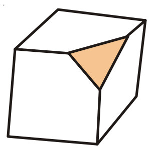
1. निम्न बहुफलक के फलक, शीर्ष और किनारों की संख्या को गिनकर यूलर सूत्र की जाँच कीजिए।

1. 

2. 

3. 

4. 

5.  6.  7.  8. 

2. क्या वर्ग प्रिज़्म और घन एक समान हैं? समझाइए।

3. क्या एक बहुफलक में केवल 3 त्रिभुजाकार फलक होसकते हैं? समझाइए।

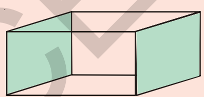
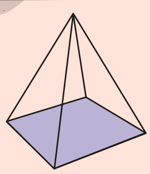
4. क्या एक बहुफलक में केवल 4 त्रिभुजाकार फलक होसकते हैं?

5. यूलर सूत्र के उपयोग से निम्न तालिका की पूर्ति कीजिए।

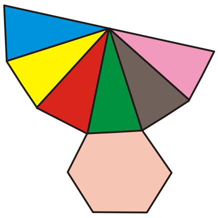
F	8	5	?
V	6	?	12
E	?	9	30

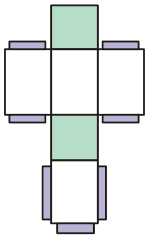
6. क्या एक बहुफलक में 10 फलक, 20 किनारे और 15 शीर्षक होसकते हैं?

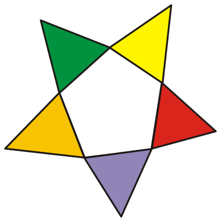
7. निम्न तालिका की पूर्ति कीजिए।

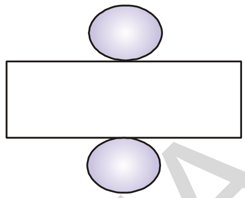
वस्तु	शीर्षों की संख्या	किनारों की संख्या
		
		
		

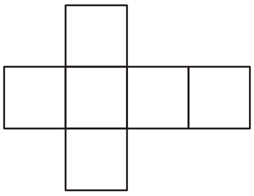
8. निम्न जालि चित्रों से बननेवाले 3-D वस्तुएँ या आकृतियों के नाम लिखो।

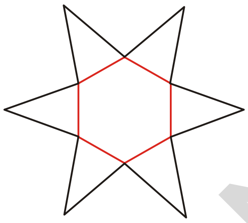

(i)

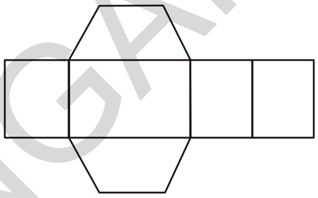

(ii)


(iii)


(iv)

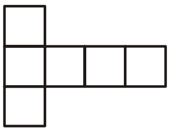

(v)

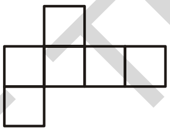

(vi)

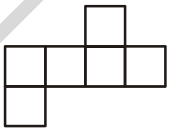

(vii)

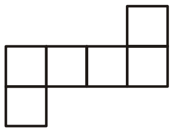
9. निम्न चित्रों को चेकरूल्ड कॉपी में बनाकर मालूम कीचिए कि इनमें से कौनसे चित्र घन को बना सकते हैं?

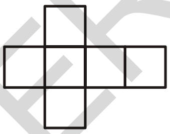
(i)

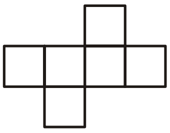

(a)

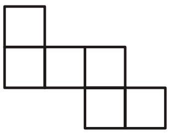

(b)

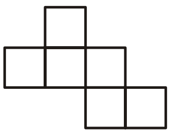

(c)

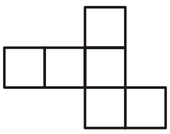

(d)

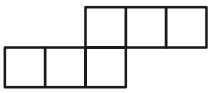

(e)

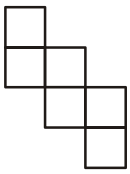

(f)


(g)


(h)


(i)


(j)


(k)

(ii). निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(a) उस बहुफलक का नाम लिखिए जिसके चार शीर्ष, चार फलक हों।

(b) उस ठोस वस्तु का नाम लिखिए जिसका कोई शीर्ष न हो।

(c) उस बहुफलक का नाम लिखिए जिनके 12 किनारे हो।

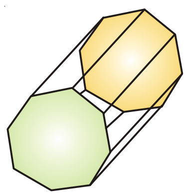
(d) उस ठोस वस्तु का नाम लिखिए जिसमें एक ही तल हो।

(e) एक घन घनाभ से कैसे भिन्न है?

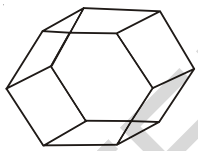
(f) दो आकृतियों के नाम लिखिए जिनके किनारे, शीर्ष और फलक की संख्या समान होती है?

(g) उस बहुफलक का नाम लिखिए जिसके 5 शीर्ष और 5 फल हैं।

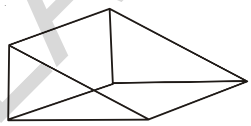
(iii). निम्न वस्तुओं के नाम लिखिए।



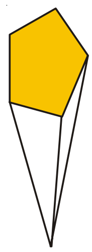
(a)



(b)



(c)



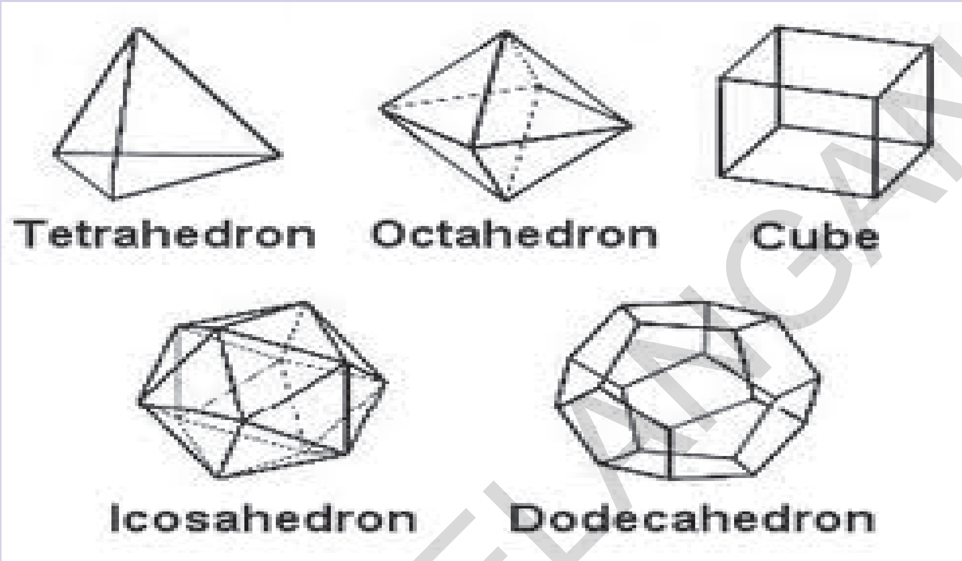
(d)

हमने क्या सीखा?

1. 2-D आइसोमेट्रिक बिंदु कागज़ पर 3-D वस्तुओं के चित्र कैसे बनाते हैं?
2. 3-D आकृतियों के तीन भिन्न दृष्य हैं, ऊपरका दृश्य, पार्श्व दृष्य और सामने का दृश्य।
3. बहुफलक : ठोस वस्तुएँ जिनके तल सपाट हो।
4. प्रिज़्म : इस बहुफलक का शीर्ष भाग और आधार समान बहुभुज होते हैं। और अन्य फलक आयताकार (समान्तर चतुर्भुज) होते हैं।
5. पिरामिड : वह बहुफलक है जिसका आधार और शीर्ष एक बहुभुज और अन्य फलक त्रिभुज होते हैं।
6. 2-D जाली चित्रों के उपयोग से 3-D वस्तुओं को बनाना।
7. बहुफलक के लिए यूलर सूत्र : $E + 2 = F + V$.

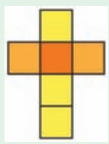
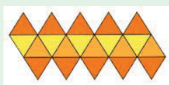
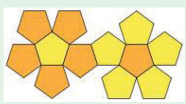
क्या आप जानते हैं?

नीचे पाँच सम बहुफलक हैं। सभी जटिल हैं, इन्हें प्लेटो की याद में अक्सर प्लेटोनिक ठोस कहते हैं।



केवल घन ऐसा बहुफलक है जो स्थान को पूर्ण रूप से भरता है।

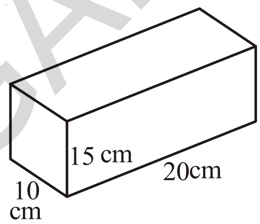
बहुफलकीय जाली चित्र

बहुफलक का नाम	सामने का बहुभुज	जाली चित्र
चतुर्पाश्वीय	4 त्रिभुज	
अष्टफलक	8 त्रिभुज	
घन	6 चतुर्भुज	
विंशतिफलक	20 त्रिभुज	
द्वादशाफलक	12 पंचभुज	

अध्याय 14

समतल का क्षेत्रफल और आयतन (घन और घनाभ)
(SURFACE AREA AND VOLUME [CUBE AND CUBOID])

14.0 परिचय



सुरेश अपने उपहार बक्से पर कागज़ लपेटना चाहता है। उसके एक मित्र ने 100 वर्ग से.मी. कागज़ ख़रीदने का सुझाव दिया, दूसरे मित्र ने 200 वर्ग से.मी. कागज़ खरीदने का सुझाव दिया। किसका सुझाव सही है?

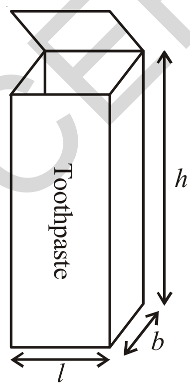
सुरेश को कैसे पता चलेगा कि उसे कितना कागज़ ख़रीदना है?

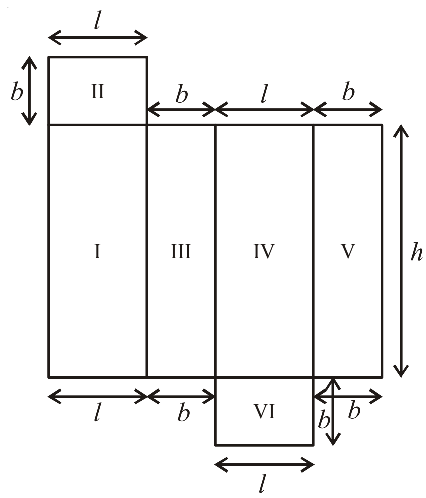
स्वाभाविक है कि आवश्यक कागज़ का परिमाण उपहार बक्से के तलीय क्षेत्रफल पर निर्भर होगा।

इस प्रकार की स्थितियों में स्वयं अपनी मदद करने के लिए हमें विभिन्न ठोस वस्तुओं के समतल के क्षेत्रफल की गणना करने की विधियों को सीखना होगा।

14.1 घनाभ

मोटा कागज़ या गत्ते से बना घनाभ की आकृति का बक्सा लीजीए। उदाहरण के लिए दंतमंजन डिब्बा लीजिए। इसके फलकों की आकृति का निरीक्षण कीजिए। समान फलक के कितनी जोडियाँ हैं?





चित्र देखिए, यदि लम्बाई 'l', चौडाई 'b', ऊँचाई 'h' इनके मापन हो तो आप समान फलक के तीन जोड़ियो को देख सकते हैं।

अब हम यह देख सकते हैं कि घनाभ का संपूर्ण फल क्या है?

क्षेत्रफल I + क्षेत्रफल II + क्षेत्रफलa III + क्षेत्रफल IV + क्षेत्रफल V + क्षेत्रफल VI

$$= h \times l + l \times b + b \times h + l \times h + b \times h + l \times b$$

तो संपूर्णतल क्षेत्रफल $= 2\,(h \times l + b \times h + b \times l)$

$$= 2\,(lb + bh + hl)$$

उपहार के बक्से की ऊँचाई,लम्बाई और चौडाईT 20से.मी., 10से.मी और 15से.मी., हैं।

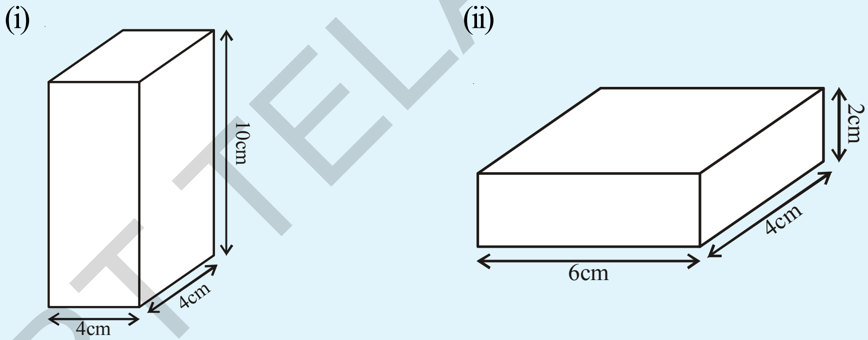
तो बक्से का संपूर्णतल क्षेत्रफल $= 2(20 \times 10 + 10 \times 15 + 15 \times 20)$

$$= 2\,(200 + 150 + 300)$$

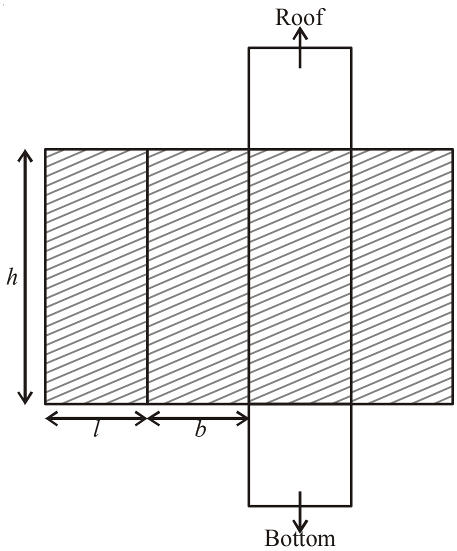
$= 2\,(650) = 1300$ वर्ग से.मी

इसे कीजिए

1. निम्न घनाभ के संपूर्णतल क्षेत्रफल को ज्ञात कीजिए।



14.1.2 पार्श्वतल क्षेत्रफल:



- घनाभ के पार्श्य फलक (ऊपर और नीचे के फलक को छोड़कर) घनाभ का पार्श्वतल क्षेत्रफल बनाते हैं, उदाहरण के लिए आप जिस कमरे में बैठे हैं, उसकी चारों दीवारों का कुल क्षेत्र फल कमरे का पार्श्वतल क्षेत्रफल होता है।

अत: घनाभ का पार्श्वतल क्षेत्रफल =

$$\text{(L.S.A.)} = (l \times h) + (b \times h) + (l \times h) + (b \times h)$$

$$= 2lh + 2bh$$

$$= 2h\,(l + b)$$

प्रयत्न करो

(i) घनाभ की आकृति का डस्टर जिसे आपकी अध्यापिका कक्षा में उपयोग करती है। एक पट्टी से इसकी भुजाओं को माप कर इसके तल का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

(ii) इस डेस्टर को ग्राफ पेपर पर इस तरह लपेटिए कि इसका पूरा तल ढंक जाय। वर्गों को गिनिये और क्षेत्रफल जाँच कीजिए।

(iii) आपकी कक्षा के लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई को माप कर ज्ञात कीजिए कि

(a) खिड़कियाँ और दरवाज़ों के क्षेत्रफल को छोडकर कमरे का संपूर्णतल क्षेत्र फल ज्ञात करो।

(b) कमरे का पार्श्वतल क्षेत्रफल।

(c) कमरे में चूना लगवानेवाला कुल क्षेत्रफल।

सोचिए और चर्चा कीजिए

1. क्या हम कह सकते हैं कि घनाभ का संपूर्णतल क्षेत्रफल = पार्श्वतल क्षेत्रफल+ 2 × आधार का क्षेत्रफल

2. यदि हम घनाभ की स्थिति को चित्र (i) चित्र (ii) के रूप में बदलते हैं, तो क्या पार्श्वतल क्षेत्रफल समान होंगे!? (i)

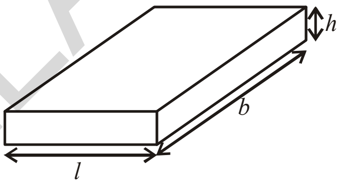


Fig (i)

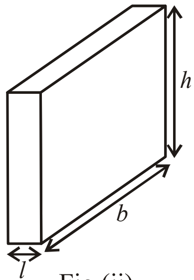


Fig (ii)

3. घनाभ के माप समान हैं तो $l = b = h$ इसका चित्र बनाकर इस घनाभ का संपूर्णतल क्षेत्रफल और पार्श्वतल क्षेत्रफल के लिए सूत्र लिखिए।

14.2 घन

निम्न जाली चित्र (i) को ग्रिड पेपर पर उतार कर काटिए। चित्र(i) में दिखाये अनुसार रेखाओं पर मोड़कर चित्र(ii) और चित्र (iii) के अनुसार उनके किनारों को देखिए। उनकी आकृति क्या हैं? उनके फलक और मापन की परीक्षा कीजिए।

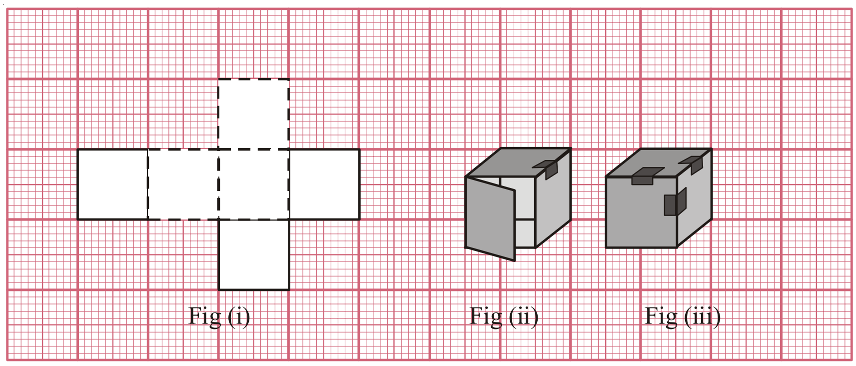
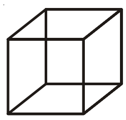
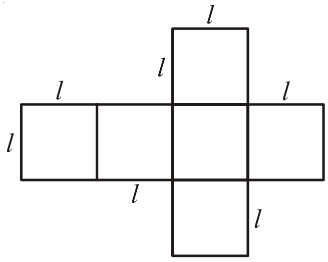


Fig (i) Fig (ii) Fig (iii)

इस घन और पूर्व बनाये गए घनाभ के अन्तर पहचानने का प्रयास कीजीए। निरीक्षण किये गए अन्तर को लिखिए।





(a) चित्र (iv) और (v) का निरीक्षण कीजिए। क्या घन के सभी फलकों की आकृति वर्गाकार है? क्या घन की लम्बाई, ऊँचाई और चौड़ाई समान हैं?

(b) एक घन के कितने फलक हैं? क्या सभी फलक समान हैं?

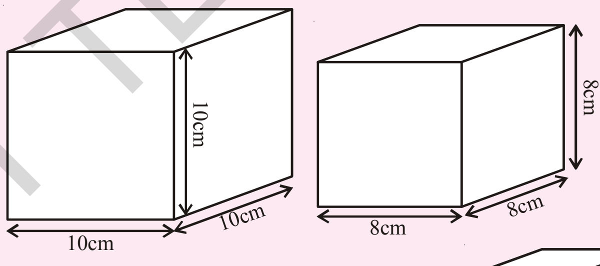
(c) यदि घन के प्रत्येक भुजा की लम्बाई l है तो प्रत्येक फलक का क्षेत्रफल क्या होगा?

(d) घन का संपूर्णतल क्षेत्रफल क्या होगा?

(e) घन का पार्श्वतल क्षेत्रफल क्या होगा?

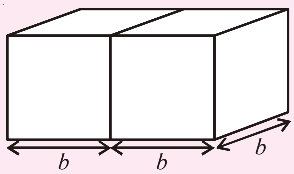
प्रयत्न कीजिए

(i) 'A' का सम्पूर्णतल क्षेत्रफल ज्ञात करो और 'B' का पार्श्वतल क्षेत्रफल ज्ञात करो।

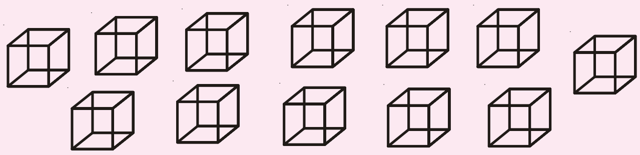


A B

(ii) संलग्न चित्र के अनुसार एक घनाभ का निर्माण करने के लिए दो घन जिनके प्रत्येक भुजा 'b' है, को जोड़िए। क्या घनाभ का संपूर्णतल क्षेत्रफल होगा?



(iii) न्यूनतम तल क्षेत्रफल के घनाभ का निर्माण करने के लिए निम्न 12 घनों की व्यवस्था किस प्रकार करोगे?



(iv) $4 \times 4 \times 4$ मापन वाली एक घन तलों का क्षेत्रफल को रंग किया गया है।घन 64 घनों में विभाजित है। कितने घन के (a) 1 फलक पर रंग है? (b) 2 फलक पर रंग है? (c) 3 फलक पर रंग है? (d) किसी भी फलक पर रंग नहीं है?

उदाहरण 1: एक घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई 15 से.मी.,12 से.मी., और 10 से.मी., हैं। घनाभ का संपूर्ण तल क्षेत्रफल ज्ञात करो।

हल: घनाभ की लम्बाई (l) = 15से.मी.

घनाभ की चौड़ाई (b) = 12से.मी.

घनाभ की ऊँचाई (h) = 10से.मी.

घनाभ का संपूर्ण तल क्षेत्रफल= $2\,(lb + bh + hl)$

= $2\,(15 \times 12 + 12 \times 10 + 10 \times 15)$ वर्ग से.मी.

= $2\,(180 + 120 + 150)$ वर्ग से.मी.

= $2\,(450)$ वर्ग से.मी.

= 900 वर्ग से.मी.

उदाहरण 2 : यदि घन के प्रत्येक किनारे को दुगुना किया जाय तो उसका संपूर्ण तल क्षेत्रफल कितने गुणा बढ़ेगा?

हल: घन के प्रत्येक किनारे को 'x' मानो।

नये घन का किनारा $= 2\,x$

वास्तविक घन का संपूर्ण तल क्षेत्रफल $= 6x^2$

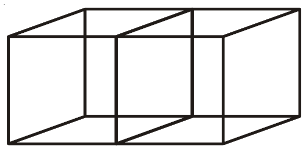
किनारे को दुगुना करने से बने नये घन का संपूर्ण तल क्षेत्रफल

$= 6(2x)^2 = 6(4x^2) = 4(6x^2)$

नये घन का संपूर्ण तल क्षेत्रफल = 4×वास्तविक घन का संपूर्ण तल क्षेत्रफल

अत: नये घन का संपूर्ण तल क्षेत्रफल वास्तविक घन के संपूर्ण तल क्षेत्रफल का 4 गुणा हैं।

उदाहरण 3: 6 से.मी., किनारेवाले दो घन के तलों को जोड़ा गया है। निर्मित घनाभ का संपूर्ण तल क्षेत्रफल ज्ञात करो। क्यों?



हल: संलग्न चित्र देखिए। घन के छः फलक हैं। दो समान घन को जोड़ने से दो फलक दिखाई नहीं देते हैं।

अत: फलकों की संख्या $12 - 2 = 10$ वर्गाकार फलक $= 10 \times l^2$ वर्ग से.मी.

तो घनाभ का संपूर्ण तल क्षेत्रफल $= 10 \times (6)^2$ वर्ग से.मी.

$= 10 \times 36$ वर्ग से.मी. $= 360$ वर्ग से.मी.

दूसरी विधिः

6 से.मी. को दो घन के तलों को जोड़ने से वह एक घनाभ की आकृति लेता है, जिसके लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः (6 + 6) से.मी.6 से.मी. और 6 से.मी. अतः12 से.मी. होता हैं। घनाभ का हलः

घनाभ का क्षेत्रफल $= 2(lb + bh + lh)$

$= 2(12 \times 6 + 6 \times 6 + 12 \times 6)\ \text{cm}^2$

$= 2(72 + 36 + 72)\ \text{cm}^2$

$= 2 \times 180\ \text{cm}^2$

$= 360\ \text{cm}^2$

उदाहरण 4: 60से.मी. लम्बे, 40 से.मी.चौड़े और 30 से.मी. ऊँचे बन्द डिब्बे को 50 पैसे प्रति 20 वर्ग से.मी. की दर से रंगने का खर्च ज्ञात करो।

हलः डिब्बे की लम्बाई (l) = 60 cm

डिब्बे की चौड़ाई (b) = 40 cm

डिब्बे की ऊँचाई (h) = 30 cm

डिब्बे का संपूर्ण तल क्षेत्रफल $= 2(lb + bh + hl)$

$= 2(60 \times 40 + 40 \times 30 + 60 \times 30)$ वर्ग से.मी.

$= 2(2400 + 1200 + 1800)$ वर्ग से.मी.

$= 2 \times 5400$ वर्ग से.मी.

$= 10800$ वर्ग से.मी.

20 वर्ग सें.मी. रंगने का खर्च = 50 पैसे = रु. $\frac{50}{100}$

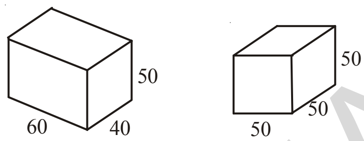
$\therefore$ 1 वर्ग से.मी. रंगने का खर्च = रु. $\frac{50}{100} \times \frac{1}{20}$

$\therefore$ 10800 वर्ग से.मी. रंगने का खर्च = रु. $\frac{50}{100} \times \frac{1}{20} \times 10{,}800$

= रु. 270

अभ्यास -14.1

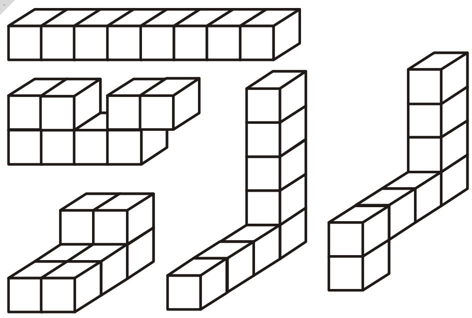
1. निम्न चित्र में दो घनाभ आकृति के डिब्बे हैं। कौनसा डिब्बा बनाने के लिए कम मात्रा पदार्थ की आवश्यकता होगी?



2. उस घन की भुजा को ज्ञात कीजिए जिसका संपूर्ण तल क्षेत्रफल 600 वर्ग से.मी. है।
3. प्रमीला ने 1मी. × 2मी. × 1.5मी. मापनवाले पेटिका के बाहरी तल पर रंग लगा दिया। नीचे के तल को छोड़कर यदि वह अन्य तलों पर रंग लगाती हैं, तो रंग लगाये गए तलों का क्षेत्रफल ज्ञात करो?
4. 20से.मी.× 15 से.मी.× 12 से.मी. के मापन के घनाभ को 5 वर्ग से.मी. की दर का खर्च ज्ञात करो।

14.3 घन और घनाभ का आयतन

एक त्रिविनिमय वस्तु द्वारा ग्रहण किये गए स्थान की मात्रा को आयतन कहते हैं। हमारी चारों ओर के वासस्श्रतसुओं के आयतन की तुलना करने का प्रयास कीजिए। उदाहरण के लिए कमरे का आयतन कमरे में रखी हुई अलमारी के आयतन से अधिक है। इसी प्रकार आपके पेंसिल के बक्से का आयतन उसके अंदर रखे हुए पेन या रबड़ के आयतन से अधिक होता है। क्या आप इनमें से किसी वस्तु के आयतन को जानते हैं?



याद कीजिए, एक क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हम वर्ग इकाई का उपयोग करते हैं? आयतन को हम कैसे ज्ञात करसकते हैं? यहाँ पर एक ठोस का आयतन ज्ञात करने के लिए हम घन इकाई का उपयोग करते हैं, क्यों कि घन सुविधाजनक ठोस आकृति हैं। (जिस प्रकार क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए वर्ग सुविधाजनक हैं।)

क्षेत्रफल मापने के लिए हम क्षेत्रफल को वर्ग इकाइयों में विभाजित करते हैं। उसी प्रकार एक ठोस आयतन ज्ञात करने के लिए स्थान को घन इकाइयों में विभाजित करने की आवश्यकता होती हैं। इकाई घन, घन की इकाई लम्बाई है। निरीक्षण कीजिए कि भिन्न प्रकार से व्यवस्थित प्रत्येक घन का आयतन 8 घन इकाई है। (ऊपर के चित्र के अनुसार)

हम यह कह सकते हैं कि एक ठोस के आयतन का मापन, उसमें उपस्थित इकाई घनों की संख्या को गिनकर किया जाता हैं। सामान्यत: आयतन के मापन के उपयोग करने वाले घन इकाइयाँ-

1 घन से.मी. = 1 से.मी. × 1 से.मी. × 1 से.मी. = 1 से.मी.^{3}

= 10 मि.मी. × 10 मि.मी. × 10 मि.मी. = ______________ मि.मी.^{3}

1 घन से.मी. = 1 मी. × 1 मी. × 1 मी. = 1 मी.^{3}

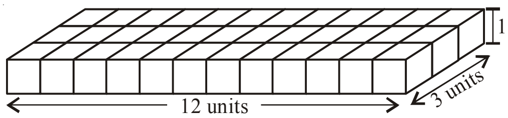
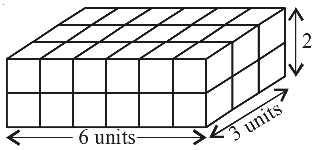
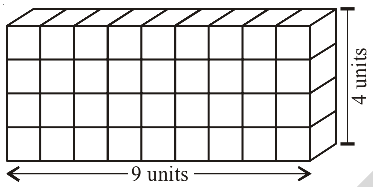
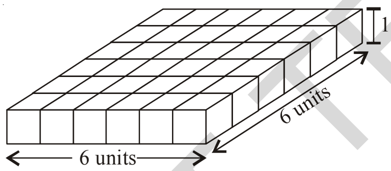
= 100 से.मी. × 100से.मी. × 100से.मी. = ______________ से.मी.^{3}

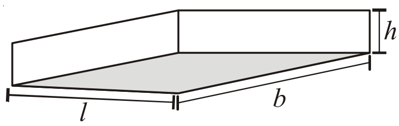
1 cubic mm = 1 मि.मी. × 1 मि.मी. × 1 मि.मी. = 1 मि.मी.^{3}

= 0.1 से.मी. × 0.1 से.मी. × 0.1 से.मी. = ______________ से.मी.^{3}

14.3.1 घनाभ का आयतन

समान परिणाम के 36 घन लीजिए। (अतः प्रत्येक घन की भुजा समान हैं।) एर घनाभ के निर्माण के लिए इनकी व्यवस्था कीजिए। इनको हम कई प्रकार से व्यवस्थित कर सकते हैं। निम्न तालिका का निरीक्षण कीजिए और रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

	घनाभ (l)	लम्बाई (b)	चौड़ाई (h)	ऊँचाई	$l \times b \times h = V$
(i)		12	3	1	$12 \times 3 \times 1 = 36$
(ii)		...	...	...	...
(iii)		...	...	...	...
(iv)		...	...	...	...



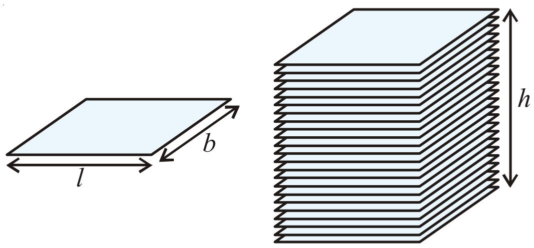
आपने क्या देखा? क्या आपको घनाभ के माप और उसके आयतन के बीच कुछ संबंध की जानकारी मिली?

क्यों कि हमने घनाभ के निर्माण के लिए 36 घनों का उपयोग किया, प्रत्येक घनाभ का आयतन 36 घन इकाई होगा। यह घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई के गुणनफल के बराबर हैं। उपर्युक्त उदाहरण से हम यह कह सकते हैं कि घनाभ का आयतन $= l \times b \times h$.उसके आधार का क्षेत्रफल $l \times b$ हैं तो हम यह भी कह सकते हैं कि-

घनाब का आयतन =आधार का क्षेत्रफल $\times$ ऊँचाई

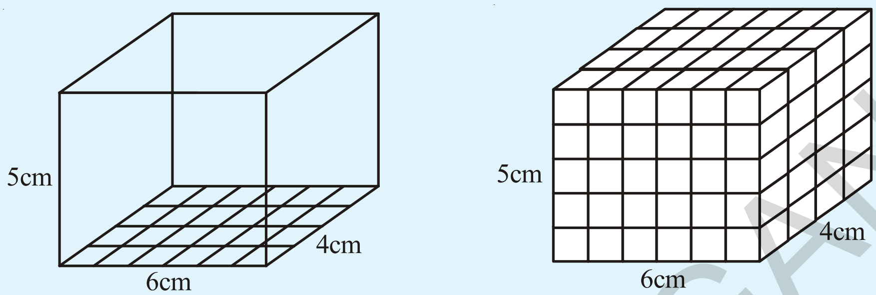
कार्यकलाप

एक कागज़ का पत्र लेकर उसका क्षेत्रफल मापिए। समान परिणाम के कागज़ के पत्रों का ढेर जमाने से घनाभ का निर्माण होता हैं। जैसे संलग्न चित्र में दिखाया गया है। इस ढेर की ऊँचाई को मापिए। पत्र के क्षेत्रफल को पत्रों की ढेर के ऊँचाई से गुणा करके घनाभ का आयतन ज्ञात कीजिए।



इसे कीजिए

घनाभ का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमश: 6से.मी., 4से.मी. और 5 से.मी. हैं।



घनाभ की लम्बाई की ओर 1 घन सेंटीमीटर के ब्लॉक रखिए। लम्बाई की ओर हम कितने ब्लाक रख सकते हैं? घनाभ की लम्बाई 6 से.मी. है तो हम 6 ब्लॉक रख सकते हैं।

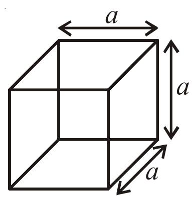
चौडाई की ओर कितने ब्लॉक रख सकते हैं? 4 क्यों कि ये 4 से.मी. है। तो एक परत में 6×4 ब्लॉक होते हैं। घनाभ में ब्लाक के कितने परत लगा सकते हैं? 5 परत क्यों ये कि ये 5 से.मी. है। प्रत्येक परत में 6×4 ब्लाक होते हैं। तो 5 परतों में $6 \times 4 \times 5$ ब्लॉक होते हैं। अत: लम्बाई ×चौड़ाई × ऊँचाई।

14.3.2 घन का आयतन:

एक घन जो घनाभ हो, जिसके लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई समान हो।

तो घन का आयतन = भुजा × भुजा × भुजा

= (भुजा)^3 = a^3



जहाँ a घन की भुजा है।

घन की लम्बाई	घन का आयतन
10 मि.मी.=1से.मी.	1000मि.मी.^{3} = 1से.मी.^{3}
10 डे.मी.= 1डे.मी.	1000 से.मी.^{3} = 1डे.मी.^{3}
10डे.मी. = 1मी.	1000 डे.मी.^{3} = 1 डे.मी.^{3}
100से.मी.=1मी.	1000000 से.मी.^{3} = 1 मी.^{3}
1000मी.=1कि.मी.	1000000000 मी.^{3}=1कि.मी.^{3}

साधारणत: हम द्रवों के आयतन को मिल्ली लीटर (मि.ली.) या लीटर (ली) में मापते हैं।

आगे, 1से.मी.^{3} = 1 मि.ली.

1000 ,से.मी.^{3} = 1 ली.

1मी.^{3} = 1000000 से.मी.^{3} = 1000 ली.

= 1 कि.ली. (किलो लीटर)

उदाहरण 5: एक लकड़ी के ब्लॉक का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी लम्बाई 20से.मी.,चौड़ाई 10से.मी. और ऊँचाई 8 सें.मी. हो।

हल: लकड़ी का ब्लॉक एक घनाभ है और घनाभ का आयत = $l \times b \times h$

यहाँ लम्बाई (l) = 20 से.मी., चौड़ाई (b) = 10 से.मी., और ऊँचाई (h) = 8 से.मी.

ब्लॉक का आयतन = 20 से.मी. × 10 से.मी. × 8 से.मी.= 1600 से.मी.^{3}

उदाहरण 6: एक पानी का टैंक 1.4 मी.लम्बा, 1मी.चौड़ा और 0.7मी.गहरा है। टैंक का आयतन लीटरों में ज्ञात करो।

हल: टैंक की लम्बाई (l) = 1.4 मी. = 140 से.मी.

टैंक की चौड़ाई (b) = 1 मी.= 100 से.मी.

टैंक की गहराई (h) = 0.7 मी. = 70 से.मी.

टैंक का आयतन = $l \times b \times h$

= (140 × 100 × 70) से.मी.^{3}

$$= \frac{140 \times 100 \times 70}{1000} \text{ लीटर}$$

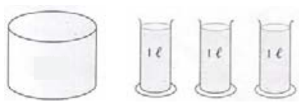
= 980 लीटर

इसे कीजिए

64 इकाई घनों की व्यवस्था कई प्रकार कीजिए कि एक घनाभ का निर्माण हो। प्रत्येक व्यवस्था के तल का क्षेत्रफल ज्ञात करो। क्या समान आयतन का ठोस घनाभ, समान तलीय क्षेत्रफल का हो सकता है?

क्या आपको मालूम हैं?

मात्रा (Capacity):



आयतन **मात्रा**

आयतन और मात्रा, इन दो शब्दों में बहुत अन्तर नहीं है।

(a)आयतन, वस्तु द्वारा ग्रहण किये गये स्थान को सूचित करता हैं।

(b)मात्रा, उस परिमाण को सूचित करता है, जो पात्र में हो।

यदि एक पानी का टिन में 100 घन से.मी. जल होता हैं, तो टिन में पानी की मात्रा 100 घन से.मी. हैं। मात्रा को लीटरों के पद में भी मापा जाता हैं।

उदाहरण 7: एक घनाभ की चौड़ाई उसके लम्बाई का आधा है और ऊँचाई लम्बाई का दुगुना है। घन का दुगुना है। घन का आयतन ज्ञात करो।

हल: घनाभ की लम्बाई को x इकाई मानो

घनाभ की चौड़ाई = $\frac{x}{2}$ इकाई

और घनाभ की ऊँचाई = $2x$ इकाई

घनाभ का आयतन = लम्बाई× चौड़ाई × ऊँचाई

= $(x \times \frac{x}{2} \times 2x)$ घन इकाई

= x^3 घन इकाई

उदाहरण 8: एक पेठी 1.8 मी. लम्बी 90 से.मी.चौडी और 60 से.मी. ऊँची हैं। 6 से.मी. × 4.5 से.मी.× 40 मि.मी. माप के साबुन के टिकियों की पेठी में इस तरह जमाना हे कि कोई जगह न बचे तो बताइए कि पेटी में कितने साबुन जमा सकते हैं?

हल: पेठी की लम्बाई (l) = 1.8 मी. = 180 से.मी.

पेठी की चौड़ाई (b) = 90 से.मी.

पेठी की ऊँचाई (h) = 60 से.मी.

पेठी का आयतन = $l \times b \times h$

= $180 \times 90 \times 60$ से.मी.^{3}

= 972000 से.मी.^{3}

साबुन की लम्बाई = 6 से.मी.

साबुन की चौड़ाई = 4.5 से.मी.

साबुन की ऊँचाई = 40 मि.मी. = 4 से.मी.

साबुन की आयतन = $6 \times 4.5 \times 4$ से.मी.^{3}

= 108.0 से.मी.^{3}

$\therefore$ आवश्यक साबुन की संख्या

$$= \frac{\text{Volume of the box}}{\text{volume of one soapcake}}$$

$$= \frac{972000}{108}$$

$$= 8000$$

अत: पेठी में 8000 साबुन को जमा सकते हैं।

उदाहरण 9: घनाभ के आकार के लकड़ी के ब्लॉक की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः21से.मी. 9से.मी. और 8से.मी. हैं। 3से.मी. भुजावाले कितने घनों को इसमें से काट सकते हैं? लकड़ी का आयतन कितना है।

हल: घनाभ की लम्बाई (l) = 21 से.मी.

घनाभ की चौड़ाई (b) = 9 से.मी.

घनाभ की ऊँचाई(h) = 8 से.मी.

घनाभ का आयतन = $21 \times 9 \times 8 = 1512$ घन से.मी.

लम्बाई की ओर से कटे जानेवाले घनों की संख्या $= \frac{21}{3} = 7$

चौड़ाई की ओर से कटे जानेवाले घनों की संख्या $= \frac{9}{3} = 3$

ऊँचाई की ओर से कटे जानेवाले घनों की संख्या $= \frac{8}{3} = 2.6$

ऊँचाई की ओर से केवल 2 घन को काट सकते हैं, बाकी नष्ट होगा।

$\therefore$ कटे गये कुल घनों की संख्या $= 7 \times 3 \times 2$

$= 42$

प्रत्येक घन का आयतन $= 3 \times 3 \times 3$ $= 27$ से.मी.^{3}

सभी घनों का आयतन $= 27 \times 42$

$= 1134$ से.मी.^{3}

$\therefore$ नष्ट हुए लकड़ी का आयतन $= 1512 - 1134 = 378$ से.मी.^{3}

उदाहरण 10: घनाभ की आकार के जलाशय में 60 लीटर प्रति मिनट की दर से पानी भरा जा रहा है। जलाशय का आयतन 108 मी.^{3}है। जलाशय को भरने के लिए कितने घंटों का समय लगेगा?

हल : जलाशय का आयतन = 108 मी.^{3} = 108×1000 लीटर

($\because$ 1मी.^{3} = 1000 लीटर)

60लीटर प्रति मिनट की दर से जलाशय भर रहा है।

$$\therefore \text{ आवश्यक समय } = \frac{108 \times 1000}{60} \text{ मिनट}$$

$$= \frac{108 \times 1000}{60 \times 60} \text{ घंटे} = 30 \text{ घंटे}$$

उदाहरण 11 : 4000 जन संख्या के गाँव में प्रत्येक व्यक्ति को प्रतिदिन 150 लीटर पानी की आवश्यकता होती है। वहाँ एक टैंक है जिसका मापन 20 मी. , 15 मी. 6मी. है तो टैंक को एक बार भरने से पानी कितने दिन के लिए पर्याप्त होगा?

हल : टैंक का आयतन $= 20$ मी. $\times$ 15 मी. $\times$ 6 मी.

$= 1800$ मी.^{3} $= 1800000$ ली.

1 व्यक्ति के लिए 1दिन उपयोग करनेवाले पानी का आयतन = 150 ली.

कुल जनता के लिए आवश्यक पानी का आयतन $= 150 \times 4000$

$$\text{आवश्यक दिनों की संख्या} = \frac{\text{टैंक का आयतन}}{\text{एक दिन में भरे पानी का आयतन}}$$

$$= \frac{1800000}{150 \times 4000} = 3 \text{ दिन}$$

अभ्यास - 14.2

1. नीचे दिये गए मापवाले घनाभ के आयतन को ज्ञात कीजिए।

	लम्बाई	चौड़ाई	ऊँचाई
(i)	8.2 मी.	5.3 मी.	2.6 मी.
(ii)	5.0 मी.	4.0 मी.	3.5 मी.
(iii)	4.5 मी.	2.0 मी.	2.5 मी.

2. टैंक के अंदर के माप दिये गए हैं, टैंक आयतन ज्ञात कीजिए। प्रत्येक टैंक के आयतन को घन मीटर और लीटर में व्यक्त कीजिए।

	लम्बाई	चौड़ाई	ऊँचाई
(i)	3 मी. 20 से.मी.	2 मी. 90 से.मी.	1 मी. 50 से.मी.
(ii)	2 मी. 50 से.मी.	1 मी. 60 से.मी.	1 मी. 30 से.मी.
(iii)	7 मी. 30 से.मी.	3 मी. 60 से.मी.	1 मी. 40 से.मी.

3. यदि घन की लम्बाई को आधा किया जाय तो आयतन का क्या होगा? क्या आयतन भी कम होगा? यदि हाँ, तो कितना?

4. निम्नांकित भुजाओं वाले घन का आयतन ज्ञात कीजिए।

(i) 6.4 से.मी. (ii) 1.3 मी. (iii) 1.6 मी.

5. 8 मी.लम्बी, 6 मी. ऊँची और 22.5 से.मी. मोटी दीवार बनाने के लिए कितने ईंट की आवश्यकता हैं? यदि प्रत्येक ईंट के माप 25 से.मी., 11.25 से.मी., 6 से.मी. हो।

6. एक घनाभ जो 25 से.मी. लम्बा, 15 से.मी.चौड़ा, और 8 से.मी. ऊँचा है।16 से.मी. आयतन वाले घन और इस घनाभ में कितना अंतर है?

7. एक बंद पेठी को 1से.मी. मोटाई की लकड़ी से बनाया गया है। पेठी के बाहरी माप 5 से.मी. × 4 से.मी. × 7 से.मी.हो तो उपयोग किये गए लकड़ी का आयतन ज्ञात करो।

8. क्रमशः 20 से.मी., 18 से.मी. और 16 से.मी. लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई वाली एक घनाभ से 4 से.मी. भुजावाले कितने घनों को काट सकते हैं?

9. 12से.मी. × 9 से.मी. × 6 से.मी. परिमाण के घनाभ से 4 से.मी. × 3 से.मी. × 2 से.मी. परिमाण के कितने घनों को बना सकते हैं?

10. घनाभ की आकृति के पात्र की लम्बाई 30 से.मी. लम्बी है और चौड़ाई 5 से.मी. है। 4.5 लीटर पानी लेने के लिए उसकी ऊँचाई कितनी होनी चाहिए?

हमने क्या सीखा ?

1. यदि l, b, h घनाभ के तीन माप हैं तो :

   (i) उसका पार्श्वतल क्षेत्रफल $2h(l+b)$ है।

   (ii) उसका संपूर्णतल क्षेत्रफल $2(lb+bh+hl)$ है।

2. यदी घन की भुजा a होतो ?

   (i) घन का पार्श्वतल क्षेत्रफल $4a^2$ है।

   (ii) घन का संपूर्णतल क्षेत्रफल $6a^2$ है।

   (iii)घन का आयतन $l \times b \times h$ है।

   (iv)घन का आयतन भुजा × भुजा × भुजा = a^3 है।

3. 1 से.मी.^{3} = 1 मि.ली.

   1 ली. = 1000 से.मी.^{3}

   1 मी.^{3} = 1000000 से.मी.^{3} = 1000 ली.

   = 1 कि.ली. (किलालीटर)

अध्याय **15**

संख्याओं से खेल (PLAYING WITH NUMBERS)

15.0 परिचय

कल्पना कीजिए ... एक दिन आप एक विचित्र संसार में नींद से जागेंगे- बिना संख्याओं के संसार, आपका दिन कैसे बीतता होगा?

आप किसी भी कैलंडर को नहीं देखेंगे कि जिससे आपको उस दिन का पता नहीं होगा कि वह दिन कौनसे महीने का हैं? आप अपने मित्रों को फोन पर धन्यवाद नहीं दे पाएँगे क्योंकि टेलिफोन नंबर नहीं होगा! और हाँ! आप सही है। आपको स्कूल के लिए देर होगी और यदि घड़ियाँ नहीं होतीं तो आप अपने पसंदीदा कार्टून/धारावाहिक छूट जायेगी और हाँ!बिना संख्याओं के क्रिकेट नहीं और फुटबाल नहीं तो बिना संख्याओं के रहने का विचार ठीक नहीं है। यदि आप किसी वस्तु का मूल्य जानना चाहते हैं या आप किसी वस्तु को अपने मित्रों में बाँटना चाहते हैं तो कैसे करोगे?क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि ये मौलिक क्रियाएँ क्या हैं? इन सभी मौलिक क्रियाओं में संख्याएँ, विभाजन के नियम ग्रस्त (संबद्ध) हैं। विभाजन के नियम बताते हैं कि हमें किसी संख्याएँ की भाजकता को बिना भाग किए ज्ञात करने में सहायता करते हैं। चलिए हम कुछ मौलिक क्रियाएँ और विभाजन के नियमों के उपयोग से संख्याओं से खेलें।

15.1 विभाजन के नियम

कुछ संख्याओं को लेकर जाँच कीजिए कि इनमें से कौनसी संख्याएँ 2 से विभाजित हैं, 3 से विभाजित हैं और इसी प्रकार 7 तक कीजिए।

जब एक संख्या 'a' संख्या 'b' को पूर्णतः विभाजित करती है तो हम यह कहते हैं कि 'b' , 'a' से विभाजित है।

इस अध्याय में हम भाजकता (विभाजन) और इसके पीछे छिपे तर्क के बारे में पढ़ेंगे। सबसे पहले हमें स्थानिक मान और खंड़ों का पुनःस्मरण करेंगे।

15.1.1 एक अंक का स्थानिक मान :

एक संख्या 645 को लेकर विस्तार रूप में लिखिए। $645 = 600 + 40 + 5 = 6 \times 100 + 4 \times 10 + 5 \times 1$

दी गई संख्या में 6 का स्थानिक मान 600 है। और 4 का स्थानिक मान 40 है। 645 में 6 सैंकडे, 4 दहाई और 5 इकाई हैं।

इसे करो:

रेखांकित शब्दों का स्थानिक मान लिखो।

(i) 29879 (ii) 10344 (iii) 98725

15.1.2 संख्याओं का विस्तार रूप :

एक संख्या को विस्तार रूप में लिखना हमें आता है। साथ ही संख्याओं को दस के घातांक का उपयोग करते हुए व्यक्त करने से भी हम परिचित हैं।

उदाहरण के लिए

प्रमाणिक अंक		विस्तार रूप		घातांक रूप
68 =60+8	=	$(10 \times 6) + 8$	=	$(10^1 \times 6) + (10^0 \times 8)$
72=70+2	=	$(10 \times 7) + 2$	=	$(10^1 \times 7) + (10^0 \times 2)$

हम जानते हैं कि $10^0 = 1$

एक दो अंकों की संख्या को $10a + b$ मानों 'a' और 'b' क्रमशः दहाई और इकाई के अंक हैं। ऊपर के प्रमाणिक अंकन का उपयोग करते हुए संख्या को $(10 \times a) + b = (10^1 \times a) + (1 \times b)$. (जहाँ $a \neq 0$)

के रूप में लिख सकते हैं।

अब हम 658 का उदाहरण लेंगे।

प्रमाणिक अंक	विस्तार रूप	घातांक रूप
$658 = 600 + 50 + 8$	$= 100 \times 6 + 10 \times 5 + 1 \times 8$	$= 10^2 \times 6 + 10^1 \times 5 + 1 \times 8$

इसी प्रकार $759 = 700 + 50 + 9 = 100 \times 7 + 10 \times 5 + 1 \times 9 = 10^2 \times 7 + 10^1 \times 5 + 1 \times 9$

सामान्य रूप में a, b, और c अंकों से बनी तीन अंकों वाली संख्या को $10^2 a + 10^1 b + c = 100 \times a + 10 \times b + c = 100a + 10b + c$, (जहाँ $a \neq 0$) लिखा जाता है।

एक संख्या के विस्तार रूप को हम इस प्रकार लिख सकते हैं।

$$3456 = 3000 + 400 + 50 + 6 = 1000 \times 3 + 100 \times 4 + 10 \times 5 + 6$$
$$= 10^3 \times 3 + 10^2 \times 4 + 10^1 \times 5 + 6$$

इस प्रकार a, b, c और d अंकों से बनी चार अंकों वाली संख्या को हम निम्नि प्रकार से लिख सकते हैं।

$$1000a + 100b + 10c + d = 1000 \times a + 100 \times b + 10 \times c + d \text{ (जहाँ } a \neq 0)$$
$$= 10^3 a + 10^2 b + 10^1 c + d.$$

इसे कीजिए :

1. निम्न संख्याओं को विस्तार रूप में लिखिए।

   (i) 65 (ii) 74 (iii) 153 (iv) 612

2. निम्न को प्रमाणिक अंकन में लिखिए।

   (i) $10 \times 9 + 4$ (ii) $100 \times 7 + 10 \times 4 + 3$

3. रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए।

   (i) $100 \times 3 + 10 \times$ ______ $+ 7 = 357$

   (ii) $100 \times 4 + 10 \times 5 + 1 =$ ________

   (iii) $100 \times$ _____ $+ 10 \times 3 + 7 = 737$

   (iv) $100 \times$ _____ $+ 10 \times q + r = pqr$

   (v) $100 \times x + 10 \times y + z =$ ____________

15.1.3 संख्याओं के गुणनफल और गुणक:

$1 \times 36 = 36$	$4 \times 9 = 36$
$2 \times 18 = 36$	$6 \times 6 = 36$
$3 \times 12 = 36$	

36 का गुणनखण्ड क्या है ?

36 के गुणनखण्ड1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. हैं। जिनमें 36 का सबसे बड़ा खण्ड कौनसा है?

हम कह सकते हैं कि प्रत्येक खण्ड दिये गए संख्या से कम या उसके समान होता है। संख्या का सबसे बड़ा खण्ड स्वयं वह संख्या ही है।

अतः प्रत्येक संख्या स्वयं का खण्ड रहता है और ‘1’ सभी संख्याओं का खण्ड होता है।

$7 \times 1 = 7$, $9 \times 1 = 9$,

यदि किसी संख्या के 1 और स्वयं को छोड़कर कोई खंड नहीं है, तो उसके बारे में आप क्या कह सकते हैं? वे **रूढ संख्याएँ** होती हैं।

उदा : 2, 3, 5, 7, 11, 13,….आदि।

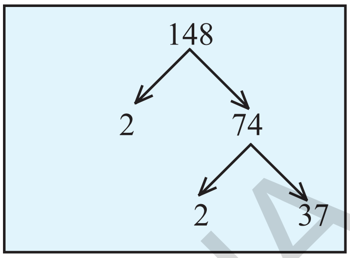
23 , 4567 , 89 एक रुचिकर संख्याओं का समुच्चय हैं जो क्रमागत अंकों से बने हैं। जाँच करके देखिए कि-

निरीक्षण कीजिए कि 191, 911, 199, 919, 991 संख्याएँ रूढ हैं या नहीं?

संख्याएँ 82817978777675747372717069686766656463626160595857565555545352
51504948474645444342414039383736353433323130292827262524232221201918
1716151413121110987654321
वे संख्याएँ जिनका आरंभ 82 से हुआ हैं और अंत 1 से, ऐसी संख्याएँ रूढ संख्याएँ कहलाती हैं।

148 के रूढ गुणन खण्ड लीजिए।

$$148 = 2 \times 74 = 2 \times 2 \times 37 = 2^2 \times 37^1$$



148 के खण्ड़ों की संख्या रूढ खण्डों के गुणनफल (खण्डों के घातांक + 1) होता है।

अर्थात $(2 + 1) \times (1 + 1) = 3 \times 2 = 6$

वे हैं- 1, 2, 4, 37, 74, 148.

यदि एक संख्या को रूढ संख्याओं के गुणनफल के रूप में लिख सकते हैं। अतः

$N = 2^a \times 3^b \times 5^c \ldots$

N के खण्डों की संख्या $(a + 1)(b + 1)(c + 1)$ ...होगा।

6 के प्रथम 5 गुणक क्या हैं?

$6 \times 1 = 6$, $6 \times 2 = 12$, $6 \times 3 = 12$, $6 \times 4 = 24$, $6 \times 5 = 30$

6 के प्रथम 5 गुणक हैं- 6,12, 18, 24, 30 6.

हम कितने गुणक लिख सकते हैं? अनंत गुणन।

हम यह कह सकते हैं कि दी गई संख्या के गुणन अनंत हैं।

इन्हें कीजिए:

1. निम्न सम संख्याओं के सभी खण्डों को लिखिए।

   (a) 24 (b) 15 (c) 21 (d) 27

   (e) 12 (f) 20 (g) 18 (h) 23 (i) 36

2. प्रथम पाँच गुणन लिखिए।

   (a) 5 (b) 8 (c) 9

3. निम्न संख्याओं को रूढ़ खण्डों में विभाजित कीजिए।

   (a) 72 (b) 158 (c) 243

15.1.4 10 से विभाजन :

10 के गुणन को लीजिए : 10, 20, 30, 40, 50, 60, ...आदि

इन सभी संख्याओं में इकाइयों के स्थान में '0' है।

क्या आप कहते हैं कि 10 के किसी भी गुणन में इकाई का स्थान शून्य होगा? हाँ! होता है।

आइए, इस नियम का तर्क देखें।

यदि हम एक तीन अंकोंवाली संख्या को लेते हैं, जिस में 'a' सैंकडों के स्थान पर, 'b' दहाई के स्थान पर और 'c' इकाई के स्थान पर हो तो हम उसे ऐसे लिखते हैं- $100\,a + 10\,b + c = 10(10a + b) + c$ 10 का गुणन $10(10a + b)$ है। यदि 'c' 10 गुणन हैं तो दी गई संख्या 10 से विभाजित होती है। यह तभी संभव है जब कि- $c = 0$.

इसे कीजिए :

1. जाँच कीजिए कि निम्न संख्याएँ 10 से विभाजित है या नहीं?

   (a) 3860 (b) 234 (c) 1200 (d) 10^3 (e) $10 + 280 + 20$

2. जाँच कीजिए कि निम्न संख्याएँ 10 से विभाजित है या नहीं?

   (a) 10^{10} (b) 2^{10} (c) $10^3 + 10^1$

प्रयास कीजिए :

1. $56Z \div 10$ के विभाजन में शेष 6 रहता है, 'Z' का मूल्य क्या हो सकता है?

15.1.5 5 से विभाजन:

5 के गुणन को लीजिए। वे हैं- 5,10,15, 20,25,30,35 ,40,45,50,............आदि-

इन सभी संख्याओं की इकाइयों के स्थान में '0' या '5' है।

यदि किसी संख्या की इकाई के स्थान में '0' या '5' है तो वह 5 से विभाजित होती है।

इस नियम के पीछे छिपे तर्क को देखेंगे।

यदि हम एक तीन अंकों वाली संख्या को लेते हैं, जहाँ a सैंकडों के स्थान में और b दहाई के स्थान में और c इकाई के स्थान में हैं तो इसे हम $100a + 10b + c = 100\,a + 10\,b + c = 5(20a + 2b) + c$ के रूप में लिख सकते हैं।

$5(20\,a + 2b)$, 5 का गुणन है।

दी गई संख्या 5 से विभाजित होती है केवल जब $c = 0$ या 5

इसे कीजिए:

1. जाँच कीजिए कि दी गई संख्याएँ 5 से विभाजित है या नहीं।

   (a) 205 (b) 4560 (c) 402 (d) 105 (e) 235785

यदि 34 A ,5 से विभाजित है तो A का मूल्य क्या हो सकता है?

दी गई संख्या में इकाई के स्थान में A, 0 या 5 होना चाहिए। तबही वह 5 से विभाजित होगा।

अतः A = 0 या 5.

इसे कीजिए:

1. यदि $4B \div 5$ में शेष 1 हो तो B का मूल्य क्या हो सकता है?
2. यदि $76C \div 5$ में शेष 2 है तो C का मूल्य क्या हो सकता है?
3. "यदि एक संख्या 10 से विभाजित हो तो वह 5 से भी विभाजित होता है" क्या यह कथन सत्य है? कारण बताइए।
4. "यदि एक संख्या 5 से विभाजित हो तो वह 10 से भी विभाजित होती है" क्या यह कथन सत्य है या असत्य? कारण बताइए।

15.1.6 2 से विभाजन

2 के गणन को लीजिए, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ...आदि

इन सभी संख्याओं के इकाई के स्थान में 0,2,4,6, 8 हैं।

यदि किसी सह्रंख्या के इकाई के स्थान में 0 या 2 या 4 या 6 या 8 (सम संख्या) है तो वह 2 से विभाजित होती है। अन्यथा वह 2 से विभाजित नहीं होगा।

इस नियम के पीछे छिपे तर्क को देखिए।

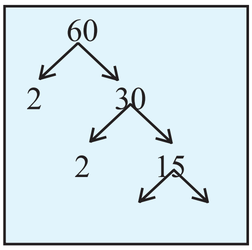
यदि हम एक तीन अंकोंवाली संख्या को लेते हैं $100 \times a + 10 \times b + c$ जहाँ a सैंकडों के स्थान में, b दहाई के स्थान में और c इकाई के स्थान में हो तो हम इसे $100\,a + 10\,b + c = 2(50a + 5b) + c$ लिख सकते हैं।

$2(50a + 5b)$ का 2 गुणक है। यदि दी गई संख्या 2 से विभाजित होती है तो संख्या के इकाई स्थान का अंक c = 0 या 2 या 4 या 6 या 8 (सम संख्या) होती है।

सोचिए चर्चा कीजिए और लिखिए-

1. उस संख्या की इकाई के स्थान के अंक को ज्ञात कीजिए, जबकि उसे 5 और 2 से विभाजित कक्षरने पर शेष क्रमशः 3 और 1रहते हैं।

उदाहरण**1:** 60 के खण्डों की संख्या को लिखिए।



हल**:** 60 के रूढ़ गुणन खण्ड रूप $2^2 \times 3^1 \times 5^1$ हैं।

$\therefore$ खण्डों की संख्या $(2 + 1)\,(1 + 1)\,(1 + 1)$

$= 3 \times 2 \times 2 = 12$

और वे हैं- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60

अभ्यास - 15.1

1. विभाजन के नियमों का उपयोग करते हुए, ज्ञात कीजिए कि तालिका में दी गई संख्याओं में कौनसी संख्याएँ 2,5,10 से विभाजित होती हैं। (हाँ या नहीं लिखिए)

संख्या	2से विभाजन	5से विभाजन	10से विभाजन
524	हाँ	ना	ना
1200			
535			
836			
780			
3005			
4820			
48630			

2. विभाजन के नियमों का उपयोग करते हुए ज्ञात कीजिए कि कौनसी संख्याएँ 2 से विभाजित हैं?

   (a) 2144 (b) 1258 (c) 4336 (d) 633 (e) 1352

3. विभाजन के नियमों का उपयोग करते हुए ज्ञात कीजिए कि कौनसी संख्याएँ 5 से विभाजित हैं?

   (a) 438750 (b) 179015 (c) 125 (d) 639210 (e) 17852

4. विभाजन के नियमों का उपयोग करते हुए ज्ञात कीजिए कि कौनसी संख्याएँ 10 से विभाजित हैं? (a) 54450 (b) 10800 (c) 7138965 (d) 7016930 (e) 10101010

5. निम्न खण्डों की संख्या ज्ञात कीजिए।

   (a) 18 (b) 24 (c) 45 (d) 90 (e) 105

6. 2, 5 और 10 से विभाजित होने वाली किन्हीं 5 संख्याओं को लिखो।
7. एक संख्या 34A, 2 से पूर्णतः विभाजित हैं, और 5 से विभाजित होने पर 1 बचता है तो A को ज्ञात कीजिए।

15.1.7 3 और 9 से विभाजन :

378 पर विचार कीजिए। इसे 378

$$= 300 + 70 + 8$$
$$= 100 \times 3 + 10 \times 7 + 8$$
$$= (99 + 1)\,3 + (9 + 1)7 + 8$$

यहाँ ‘3’ को सामान्य खण्ड में नहीं लिया जा सकता।

अनुक्रम के पुनर्व्यवस्थित करने से-

$$378 = 99 \times 3 + 9 \times 7 + (3 + 7 + 8)$$
$$= 99 \times 3 + 3 \times 3 \times 7 + (3 + 7 + 8)$$
$$= 3\,(99 + 21) + (3 + 7 + 8)$$

$3(99 + 21)^3$ का गुणक हैं। अतः दी गई संख्या 3 से विभाजित होगी, यदि $(3 + 7 + 8)$ अंकों का योग 3 का गुणक हो।

9 से विभाजन के लिए:

378 को इस तरह लिखा जा सकता है।

$$378 = 300 + 70 + 8$$
$$= 100 \times 3 + 10 \times 7 + 8$$
$$= (99 + 1)\,3 + (9 + 1)7 + 8$$
$$= 99 \times 3 + 9 \times 7 + (3 + 7 + 8)$$
$$= 9\,(11 \times 3 + 1 \times 7) + (3 + 7 + 8)$$
$$= 9\,(33 + 7) + (3 + 7 + 8)$$

$9(33 + 7)$,9 का गुणक है। अतः दी गई संख्या 9 से विभाजित होगी, यदि $(3 + 7 + 8)$ अंकों का योग 9 का गुणक हो।

हम इस नियम को समझायेंगे:

यदि हम तीन अंकों की संख्या 100a+10b+c लेते हैं जहाँ 'a' सैंकडों के स्थान में'b' दहाई के स्थान में और 'c' इकाई के स्थान में हैं।

$$100a + 10b + c = (99 + 1)a + (9 + 1) + c = 99a + 9b + (a + b + c)$$
$$= 9(11a + b) + (a + b + c) \rightarrow \text{अंकों का योग}$$

$9(11a + b)$, 3 और 9 का गुणक हैं। दी गई संख्या 3 या 9 से विभाजित होती है, केवल यदि अंकों का योग $(a + b + c)$ 3 या 9 का गुणक है या (a+b+c) 3 या 9 से विभाजित है।

क्या यह संख्याओं का नियम उन संख्याओं के लिए भी उपयुक्त है जिन में 3 अंक से अधिक हो? 5 और 6 अंकों की संख्याओं को लेकर जाँच कीजिए। आपने यह ध्यान दिया कि 2,5 और 10 से किसी संख्या के विभाजन को संख्या के इकाई स्थान के स्वभाव से निर्णय कर सकते हैं। परन्तु 3 और 9 से विभाजन, संख्या के सभी अंकों पर निर्भर हैं।

इसे कीजिए:

1. जाँच कीजिए कि कौनसी संख्याएँ 3 या 9 या दोनो से विभाजित होती हैं?

(a) 3663 (b) 186 (c) 342 (d) 18871

(e) 120 (f) 3789 (g) 4542 (h) 5779782

उदाहरण 2: 24 P को 3 से विभाजित करने पर शेष 1 और 5 को विभाजित करने से शेष 2 होता है। तो P का मूल्य ज्ञात करो।

हल : यदि 24 P को 5 से विभाजित करने पर शेष 2 है तो P का मूल्य 2 या 7 होगा।

यदि $P = 2$ तो दी गई संख्या को 3 से विभाजित करने पर शेष 2 होगा। यदि $P = 7$ हो तो दी गई संख्या को 3 से विभाजित करने पर 1 बचता है। अत: $P = 7$.

अभ्यास -15.2

1. यदि 345 A 7, 3 से विभाजित है तो 'A' के स्थान पर अविद्यमान अंक की पूर्ति कीजिए।
2. यदि 2791 A, 9 से विभाजित है तो 'A' के स्थान पर अविद्यमान अंक की पूर्ति कीजिए।
3. 2,3,5,9 और 10 से विभाजित होने वाले कुछ संख्याएँ लिखो।
4. 2A8 , 2 से विभाजित है तो A का मूल्य क्या हो सकता है?
5. 50B , 5 से विभाजित है तो B का मूल्य क्या हो सकता है?
6. 2P , 2 और 3 से विभाजित है तो P का मूल्य क्या हो सकता है?
7. 54Z को 5 से विभाजित करने पर शेष 2 बचता है और 3 से विभाजित करने पर शेष 1 बचता है तो Z का मूल्य क्या होगा?
8. 27Q को 5 से विभाजित करने पर शेष 3 बचता है तो 3 से विभाजित करने पर कितना बचेगा?

15.1.8 6 से विभाजन :

6 का एक गुणक 24 पर विचार कीजिए।

स्वाभाविक है कि यह 6 से विभाजित होगा।

क्या 24, 6 के खण्ड 2 और 3 से विभाजित हैं ?

24 के इकाई स्थान पर 4 है तो क्या ये 2 विभाजित होगा ?

24 के अंकों का योग $2 + 4 = 6$ तो यह 3 से भी विभाजित है।

अब इसे 6 के किसी और गुणक के साथ जाँच कीजिए। अब हम यह निष्कर्श निकाल सकते हैं कि जो संख्या 6 से विभाजित है, वह 6 के खण्ड 2 और 3 से भी विभाजित होती है। इस कथन के व्युत्क्रम की जाँच करो। एक संख्या यदि 2 से विभाजित है तो 2 उसका रूढ़ खण्ड है, यदि 3 से विभाजित है तो 3 उसका रूढ़ खण्ड है।

तो यदि एक संख्या 2 और 3 से विभाजित है तो 2 और 3 उसके रूढ़ खण्ड होते हैं तो उनका गुणनफल $2 \times 3 = 6$ भी उस संख्या का खण्ड होगा।

अन्य शब्दों में यदि एक संख्या 6 से विभाजित हैं तो वही 2 और 3से भी विभाजित हैं।

इसे कीजिए:

1. जाँच कीजिए कि दी गई संख्याएँ 6 से विभाजित हैं या नहीं?
   (a) 1632 (b) 456 (c) 1008 (d) 789 (e) 369 (f) 258
2. जाँच कीजिए कि दी गई संख्याएँ 6 से विभाजित हैं या नहीं?
   (a) $458 + 676$ (b) 6^3 (c) $6^2 + 6^3$ (d) $2^2 \times 3^2$

15.1.9 4 और 8 से विभाजन :

(a) एक चार अंकोंवाली संख्या $1000a + 100b + 10c + d = 4(250a + 25b) + (10c + d)$. $4(250a + 25b)$, 4 का गुणक है तो दी गई संख्या 4 से विभाजित है। केवल यदि 10c+d, 4 से विभाजित हो। दी गई संख्या में यदि अंतिम दो **अंकों से बननेवाली संख्या** 4 से विभाजित है या अंतिम दो अंक 0 होते हैं तो वह संख्या 4 से विभाजित होती है।

4 अंको से अधिक अंकों वाली संख्या को विस्तार रूप से लिखिए। क्या हम इकाई और दहाई स्थान के अंक छोडकर अन्य किसी अंक को 4 के गुणन के रूप में लिख सकते हैं?

4 अंको से अधिक अंकों वाली संख्या को लेकर जाँच कीजिए कि 4 से विभाजन संख्या के अंतिम दो अंकों पर निर्भर है या नहीं।

(b) एक चार अंकों वाली संख्या लीजिए। $1000 \times a + 100 \times b + 10 \times c + d$

$= 1000a + 100b + 10c + d = 8(125a) + (100b + 10c + d)$

8(125a) सदैव 8 से विभाजित है या अंतिम तीन अंक ‘0’ हो तो संख्या 8 से विभाजित होती है।

4 अंकों से अधिक अंकों वाली संख्या को विस्तार रूप से लिखिए। क्या हम इस संख्या के इकाई, दहाई और सैंकड़ों के स्थान में रहे अंकों को छोड़ कर अन्य में 8 के गुणन के रूप में लिख सकते हैं?

4 से अधिक अंकों वाली संख्या लेकर जाँच कीजिए। 8 से विभाजन संख्या के अंतिम अंकों पर निर्भर है या नहीं?

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 क्या आप इन अंकों को इस प्रकार व्यवस्थित कर सकते हो कि संख्या के पहले दो अंक2 से, पहले तीन अंक 3 से, पहले चार अंक 4 से और इसी प्रकार नौ तक?

हल : अंको का क्रम 123654987 अचूक है। जाँच कीजिए।

उदाहरण **3:** जाँच कीजिए कि 6582, 4 से विभाजित है या नहीं?

हल**:** संख्या के अंतिम दो अंक 82, जो कि 4 से विभाजित नहीं, इसीलिए संख्या भी 4 से विभाजित नहीं होता।

उदाहरण **4:** जाँच कीजिए कि 28765432,8 से विभाजित है या नहीं?

हल **:** संख्या के अंतिम तीन अंक 432 जो कि 8 से विभाजित हैं, इसीलिए पूर्ण संख्या भी 8 से विभाजित होती है।

यदि 8 से विभाजित होने वाली संख्या, 4 से भी विभाजित है, तो हम यह नहीं कह सकते कि प्रत्येक 4 से भी विभाजित होने वाली संख्या वह 8 से भी विभाजित है। 8 के सभी गुणक 4 से विभाजित हैं, परन्तु 4 के सभी गुणक 8 से विभाजित नहीं हो सकते हैं।

इसे कीजिए:

1. जाँच कीजिए कि दी गई संख्याएँ 4 या 8 या दोनों से विभाजित हैं या नहीं?

(a) 464 (b) 782 (c) 3688 (d) 100

(e) 1000 (f) 387856 (g) 4^4 (h) 8^3

प्रयास कीजिए :

1. जाँच कीजिए कि दी गई संख्याएँ 4 या 8 या दोनों से विभाजित हैं या नहीं?

(a) $4^2 \times 8^2$ (b) 10^3 (c) $10^5 + 10^4 + 10^3$ (d) $4^3+4^2+4^1-2^2$

15.1.10 7 से विभाजन:

तीन अंकों वाली संख्या को $100 \times a + 10 \times b + c$ को $100a + 10b + c = 98a + 7b + (2a + 3b + c)$ भी लिख सकते हैं।

यहाँ 7 सामान्य खण्ड नहीं है। इसे हम पुनः इस प्रकार लिखेंगे कि 7 इसका सामान्य खण्ड होगा।
$= 7(14a + b) + (2a + 3b + c)$

$7(14a + b)$, '7' का गुणक है।दी गई संख्या 7 से विभाजित होती है, केवल को $(2a + 3b + c)$, 7 से विभाजित हो।

उदाहरण **5:** जाँच कीजिए कि 364, 7 से विभाजित है या नहीं?

हल **:** जहाँ $a = 3, b = 6, c = 4, (2a + 3b + c) = 2 \times 3 + 3 \times 6 + 4$

$= 6 + 18 + 4 = 28$ (7 से विभाजित है) इसी लिए दी गई संख्या भी '7' से विभाजित है।

1. जाँच कीजिए कि दी गई संख्याए 7 से विभाजित है या नहीं?

(a) 322 (b) 588 (c) 952 (d) 553 (e) 448

इसे कीजिए:

1 एक चार अंकों की संख्या लेकर '7' से विभाजन का नियम बनाइए।

2. आप के नियम की जाँच 3192 से कीजिए। जो कि 7 का गुणक है।

15.1.11 11 से विभाजन :

एक 5 अंकों की संख्या लीजिए। $10000a + 1000b + 100c + 10d + e$

यहाँ 11 को सामान्य खण्ड के रूप में नहीं लिया जा सकता। इस विस्तार को पुनः लिखने पर

$$= (9999 + 1)\,a + (1001 - 1)\,b + (99 + 1)\,c + (11 - 1)\,d + e$$

$$= 9999a + 1001\,b + 99c + 11d + a - b + c - d + e$$

$$= 11\,(909a + 91b + 9c + d) + (a + c + e) - (b + d)$$

$11\,(909a + 91b + 9c + d)$ सदैव 11 से विभाजित है।

तो दी गई संख्या 11 से विभाजित है। यदि केवल $(a + c + e) - (b + d)$, 11 से विभाजित है।

अतः $(a + c + e) - (b + d)$,11 का गुणक या शून्य होगा।

यदि एक संख्या के विषम स्थान के अंकों का योग $(a + c + e)$ और सम स्थानों के अंकों का योग $(b+ d)$ का अंतर 11 के गुणक या ० है, तो दी गई संख्या 11 से विभाजित होती है।

निम्न तालिका का निरीक्षण कीजिए।

संख्या	विषम स्थान के अंकों का योग (बाये ओर से)	सम स्थान के अंको का योग (बायें ओर से)	अन्तर
308	3 + 8 = 11	0	11 – 0 = 11
1331	1 + 3 = 4	3 + 1 = 4	4 – 4 = 0
61809	6 + 8 + 9 = 23	1 + 0 = 1	23 – 1 = 22

हर स्थिति में हम यह देख सकते हैं कि अन्तर ० या 11 से विभाजित हैं। इसलिए सभी संख्याएँ 11 से विभाजित हैं ।

5081 के लिए, विषम स्थानों के अंकों को योग और सम स्थान के अंकों के योग का अंतर $(5 + 8) - (0 + 1) = 12$ है जो11 से विभाजित नहीं है। इसलिए 5081 भी 11 से विभाजित नहीं होती है।

इसे कीजिए:

1. जाँच कीजिए कि दी गई संख्याएँ 11 से विभाजित हैं या नहीं ?

   (i) 4867216   (ii) 12221   (iii) 100001

तीन अकों की संख्या 123 पर विचार करो।

इसे दो बार लिखने की संख्या 123123 बनती है।

अब बायें से विषम स्थान केअंकों का योग क्या होगा ? $1 + 3 + 2 = 6$

सम संख्या के अंकों का योग (दायें ओर से)क्या होगा ?

$2 + 1 + 3 = 6$

इनका अंतर क्या है ? शून्य हैं। इसलिए 123123, 11 से विभाजित है।

तीन अंकों की संख्या को लेकर, इसे दो बार लिखकर एक संख्या बनाईये यह 11 से पूर्णतः विभाजित है।

प्रयास कीजिए :

1. जाँच कीजिए कि 789789 , 11 से विभाजित है या नही?
2. जाँच कीजिए कि 348348348348, 11 से विभाजित है या नही ?
3. एक सम गुराजबंध 135531 लेकर जाँच कीजिए कि यह 11 से विभाजित है या नही?
4. जाँच कीजिए 1234321, 11 से विभाजित है या नही ?

अभ्यास - 15.3

1. जाँच कीजिए की दी गई संख्याएँ '6' से विभाजित है या नही ?

   (a) 273432   (b) 100533   (c) 784076   (d) 24684

2. जाँच कीजिए कि दी गई संख्याएँ '4' से विभाजित है या नही ?

   (a) 3024   (b) 1000   (c) 412   (d) 56240

3. जाँच कीजिए कि दी गई संख्याएँ '8' से विभाजित है या नही ?

   (a) 4808(b) 1324   (c) 1000   (d) 76728

4. जाँच कीजिए कि दी गई संख्याएँ '7' से विभाजित है या नहीं?

   (a) 427 (b) 3514 (c) 861 (d) 4676

5. जाँच कीजिए कि दी गई संख्याएँ '11' से विभाजित है या नहीं?

   (a) 786764 (b) 536393 (c) 110011 (d) 1210121
   (e) 758043 (f) 8338472 (g) 54678 (h) 13431
   (i) 423423 (j) 168861

6. यदि एक संख्या '8', से विभाजित है तो वह '4' से भी विभाजित है?

7. एक तीन अंकों की संख्या 4A 3 को दूसरी तीन अंकों की संख्या 984 से जोड़ा गया। यह योग 13B7, चार अंकों की संख्या है, जो 11 से विभाजित है (A + B) को ज्ञात कीजिए।

15.2 कुछ और विभाजन के नियम

(a) संख्याओं के विभाजन के कुछ और नियमों का निरीक्षण करेंगे।

24 एक खंड 12 पर विचार करो।

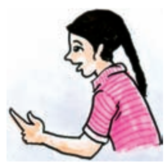
12 के खंड 1,2,3,4,6,12 है।

2,3,4,6 से 24 के विभाजन की जाँच करेंगे। हम यह कह सकते हैं कि 24,12 के सभी खंडो से विभाजित है।

तो, हम यह कह सकते हैं कि एक संख्या दूसरी संख्या से विभाजित है तो वह संख्या उसके खंडों से भी विभाजित होता है।

(b) एक संख्या 80 पर विचार करो 4 और 5 से विभाजित होती है। यह $4 \times 5 = 20$ से भी विभाजित होती है, जहाँ 4 और 5 एक दूसरे से संबंधित रूढ़ हैं। (4 और 5 का सामान्य खंड नहीं है)

इसी तरह 60 3 और 5 से विभाजित है, जिनका कोई सामान्य खंड नहीं है। 60 $3 \times 5 = 15$ से भी विभाजित है।



यदि 'a' और 'b' के सामान्य खंड नहीं है, और यदि 'a' और 'b' एवं $a \times b$ से भी संख्या विभाजित हैं तो इस गुण की (जाँच कीजिए यदि 'a' और 'b' संबंधित रूढ़ हैं।)

(c) दो संख्याएँ 16 और 20 है। दोनों संख्याएँ 4 से विभाजित हैं $16 + 20 = 36$ भी 4 से विभाजित है।

16 और 20 के सामान्य भाजक के लिए इसे कोशिश कीजिए ।

किसी अन्य संख्याओं की जोडी के लिए इसकी जाँच कीजिए ।

यदि दी गई दो संख्याएँ एक संख्या से विभाजित है, तो उनका योगफल भी उस संख्या से विभाजित होता है।

(d) 35 और 20 को लीजिए ये 5 से विभाजित है। क्या इनका अंतर $35 - 20 = 15$ भी 5 से विभाजित है? इसे अन्य संख्याओं की जोडी के लिए कोशिश कीजिए।

यदि दी गई दो संख्याएँ एक संख्या से विभाजित है, तो उनका अंतर भी उस संख्या से विभाजित होता है।

इसे कीजिए:

1. संख्याओं की भिन्न जोडियों को लेकर ऊपर के चार नियमों की जाँच कीजिए ।
2. 144 , 12 से विभाजित है। क्या यह 12 के खंडों से भी विभाजित है? जाँच कीजिए ।
3. जाँच कीजिए कि $2^3 + 2^4 + 2^5$, 2 से विभाजित हैं या नहीं ?
4. जाँच कीजिए कि $3^3 - 3^2$,3 से विभाजित हैं या नहीं? समझाइए ।

तीन क्रमांगत संख्याओं का गुणनफल $4 \times 5 \times 6 = 120$ पर विचार कीजिए यह 3 से विभाजित है। क्योंकि इन क्रमागत संख्याओं में एक संख्या 3 का गुणनफल है। इसी तरह, यदि हम किन्हीं तीन क्रमागत संख्याओं के गुणनफल को लेते हैं, जिनमें से एक 3 का गुणक है, तो तीन क्रमागत संख्याओं के गुणनफल सदैव 3 से विभाजित होता है।

प्रयास कीजिए :

1. जाँच कीजिए की $1576 \times 1577 \times 1578$, 3 से विभाजित है या नहीं?

बडी संख्याओं के लिए 7 से विभाजन का नियम :

3 अकों की संख्याओं के लिए 7 से विभाजन के नियम को हमने चर्चा किया। यदि एक संख्या के अंकों की संख्या 3 से अधिक है, तो 3 से भाजकता को हम सरल कर सकते हैं।

जाँच कीजिए कि 7538876849,7 से विभाजित है या नहीं?

चरण 1 : दायें से बायें की ओर संख्या के 3 अंकों का समूह बनाइए। यदि सबसे बायीं ओर की संख्या 3 अंकों से कम है, तो उसे एक समूह मानिये ।

7| 538| 876 |849

D C B A

चरण 2 : एक स्थान छोडकर दूसरे स्थान के समूह को जोडिए। अतः. A + C और B + D कीजिए।

$$\begin{array}{r} 849 \\ +\ 538 \\ \hline 1387 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 876 \\ +\ \ \ 7 \\ \hline 883 \\ \hline \end{array}$$

चरण 3 : 883 को 1387 से घटाओ और परिणामी 3 अंकों की संख्या के लिए 7 के विभाजन के नियम की जाँच कीजिए ।

$$\begin{array}{r} 1387 \\ -\ \ 883 \\ \hline 504 \\ \hline \end{array}$$

7 के विभाजन नियम से हमें ज्ञात है कि 504,7 से विभाजित है।

अतः दी गई संख्या 7 से विभाजित है।

प्रयास कीजिए :

1. 10 अंकों की संख्यओं को लेकर ऊपर दी गई 7 से विभाजन की विधि का उपयोग करके जाँच कीजिए ।

विभाजन के नियमों के उपयोग से हम, दी गई संख्या में अवधिमान संख्या का अनुमान लगा सकते हैं। मान लो कि एक संख्या 84763A9 , 3 से विभाजित है। हम अंकों के योग का भी अनुमान कर सकते हैं।

8 + 4 + 7 + 6 + 3 + A + 9 = 37 + A,3 से विभाजित होने के लिए A का मूल्य 2 या 5 या 8 होना चाहिए।

अभ्यास - 15.4

1. जाँच कीजिए कि 25110,45 से विभाजित है या नहीं ?
2. जाँच कीजिए कि 61479 ,81 से विभाजित हैं या नहीं ?
3. जाँच कीजिए कि 864,36 से विभाजित है या नहीं ? यह भी जाँच कीजिए कि 864,36 के सभी खंडों से विभाजित है या नहीं ?
4. जाँच कीजिए कि 756,42 से विभाजित है या नहीं ? जाँच कीजिए कि 756 , 42 से विभाजित है या नहीं ?
5. जाँच कीजिए कि 2156 ,11 और 7 से विभाजित है या नहीं ? यह भी जाँच कीजिए कि 2156 ,11 और 7 के गुणनफल से भी विभाजित है या नहीं ?
6. जाँच कीजिए कि 1435,5 और 7 से विभाजित है या नही ? यह भी जाँच कीजिए कि 1435 ,5 और 7 के गुणनफल से भी विभाजित है या नहीं ?

7. जाँच कीजिए कि 456 और 618, 6 से विभाजित है या नहीं ? और यह भी जाँच कीजिए कि 456 और 618 का योग, 6 से विभाजित है या नहीं?

8. जाँच कीजिए कि 876 और 345,3 से विभाजित है या नहीं? और यह भी जाँच कीजिए कि 876 और 345 का अंतर 3 से विभाजित है या नहीं?

9. जाँच कीजिए कि $2^2+2^3+2^4$, 2 या 4 या दोनों से विभाजित है या नहीं?

10. जाँच कीजिए कि 32^2 , 4 या 8 या दोनों से विभाजित है या नहीं?

11. यदि 5 अंकों की संख्या A679B,72 से विभाजित है तो 'A' और 'B' को ज्ञात कीजिए।

15.3 विभाजन के नियमों पर आधारित पहेलियाँ :

राजू और सुधा संख्याओं से खेल रहे हैं। उनके बीच हुई बातचीत इस प्रकार है :

सुधा कहती है, मैं तुमसे एक प्रश्न पूछूँगी।

सुधा : एक दो अंकों की संख्या को चुनो।

राजू : ठीक है। मैंने चुना (वह 75 को चुनता है।)

सुधाः अंकों को उल्टा करो (स्थान बदलो) (नई संख्या प्राप्त करने के लिए)

राजू : ठीक है।

सुधा : चुनी हुई संख्या से जोडो.

राजू : ठीक है । (मैं ने किया)

सुधा : अब तुम्हारे उत्तर को 11 से विभाजित करो, तुम्हें शेष शून्य प्राप्त होगा ।

राजू : हाँ, लेकिन तुम्हें कैसे पता चला ?

क्या आप सोच सकते हैं कि यह कैसे हुआ ?

अब हम सुधा के उपाय (युक्ति) के पीछे छिपे तर्क को समझेंगे ।

माना कि राजू ने $10a + b$ संख्या को चुना (इस प्रकार कि "a" दहाई के स्थान का अंक है और "b" इकाई के स्थान का अंक है और $a \neq 0$) इसे हम $10 \times a + b = 10a + b$ लिख सकते हैं और अंको को बदलने से (उल्टा करने से) उसे $10b + a$. संख्या प्राप्त होता है। जब वह दो संख्याओं को जोडता है तो उसे $(10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b = 11(a + b)$ प्राप्त हुआ ।

यह योग सदैव 11 का गुणक है । यदि वह इस संख्या को, 11 से विभाजित करता है तो भागफल $(a + b)$, है, जो बिल्कुल चुनी हुई संख्या के a और b का योगफल है।

हाँ, आप इसकी जाँच किन्हीं और दो अंकों की संख्या के लिए कर सकते हैं ।

इसे कीजिए :

1. परिणाम की जाँच कीजिए, यदि चुनी हुई संख्याएँ निम्न प्रकार हैं।

   (i) 37 (ii) 60 (iii) 18 (iv) 89

2. एक क्रिकेट के दल में 11 खिलाडी हैं। चुनाव मंडल ने खिलाडियों के लिए $10x + y$ कमीजें खरीदीं। उन्होंने फिर से $10y + x$ कमीजें खरीदकर कुल कमीजों को खिलाड़ियों में समान संख्या में बाँट दिया। 11खिलाड़ियों को कमीजें बाँटने के बाद कितने बच गए? प्रत्येक खिलाड़ी को कितनी कमीजें मिलीं?

सोंचिए,चर्चा कीजिए और लिखिए :

दो अंकों की एक संख्या को लेकर उनके अंकों को बदलकर (उल्टा करके) एक और संख्या को प्राप्त कीजिए। छोटी संख्या को बडी संख्या से घटाइए। क्या इन दो संख्याओं का अंतर सदैव 9 से विभाजित है।

इसे कीजिए :

1. एक टोकरी में '$10a + b$ फल है । ($a \neq 0$ and $a > b$) इनमें से '$10b + a$ फल सड गये। शेष फलों को 9 व्यक्तियों में समान बाँटा गया । समान रूप में बाँटने के बाद कितने फल बच गए ? प्रत्येक व्यक्ति को कितने फल मिले ?

15.4. 3 अंकों की संख्याओं से खेल

सुधा : अब एक तीन अंकों की कोई संख्या सोचो।

राजू : ठीक है। (वह 157 को चुनता है)

सुधा : अंकों को उल्टा करो (स्थान बदलो) और छोटी संख्या को बडी संख्या से घटाओ ।

राजू : ठीक है ।

सुधा : तुम्हारे उत्तर को 9 या 11 से विभाजित करो । मुझे पूरा विश्वास है कि कोई शेष नहीं रहेगा ।

राजू : हाँ, तुम्हें कैसे पता चला ?

सही है ! सुधा को कैसे पता है ?

जिस तरह हमने अंको की संख्या के लिए किया है, उसी से हम इस तर्क को व्युत्पन्न कर सकते है। तीन अंको की संख्या $100a + 10b + c$ है । अंकों को उल्टा लिखने से उसे$100c + 10b + a$ प्राप्त होगा ।

यदि $(a > c)$ संख्याओं का अन्तर $(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 99a - 99c = 99(a - c) = 9 \times 11 \times (a - c)$ है ।

और यदि $a = c$, तो अंतर '0' है । प्रत्येक स्थिति में परिणाम 99 का गुणांक है। अतः वह 9 और 11 दोनों से विभाजित है और भागफल $(a - c)$ या $(c - a)$ होगा ।

इसे कीजिए:

1. ऊपर दी गई कार्यकलाप की जाँच निम्न संख्याओं से कीजिए ?

   (i) 657 (ii) 473 (iii) 167 (iv) 135

प्रयास कीजिए :

एक तीन अंकों की संख्या लेकर, नये संख्याएँ बनाने के लिए उनके अंको को प्रतिस्थापित कीजिए । (ABC, BCA, CAB) अब इन तीन संख्याओं को जोडो । किन संख्याओं से इनका योगफल विभाजित होगा ?

15.5 अविद्यमान अंकों की पहेलियाँ

एक अंकगणित में अंकों के स्थान पर अक्षरों को लेकर हम कुछ पहेलियों को बना सकते हैं और हमें यह मालूम करना है, कि कौन-सा अक्षर कौन-से अंक का प्रतिनिधित्व करता है। हम कुछ योग (संकलन) और गुणनफल के कुछ समस्याओं(शाब्दिक प्रश्न) को हल करेंगे।

पहेलियों की तीन शर्त है :

1. पहेली का प्रत्येक अक्षर को केवल एक अंक के लिए लेना चाहिए । प्रत्येक अंक को सिर्फ एक ही अक्षर से सूचित करना है।
2. उच्च स्थानीय मान का अंक शून्य नहीं हो सकता है।
3. पहेली का केवल एक ही उत्तर होना चाहिए।

उदाहरण 6: 17A के योग में A का मूल्य ज्ञात करो।

$$\begin{array}{r} 17A \\ +\ 2A4 \\ \hline 407 \\ \hline \end{array}$$

हल : निरीक्षण से $A+4=7$ था

इसलिए $A=3$

$173+234=407$

या

$$\begin{array}{r} 100+70+A \\ 200+10A+4 \\ \hline 300+70+11A+4 = 407 \\ 11A = 33 \\ A = 3 \end{array}$$

उदाहरण 7 : $Y+Y+Y=MY$ के योग में M और Y का मूल्य ज्ञात करो।

हल : $Y+Y+Y=MY$

$3Y = 10M+Y$

$2Y = 10M$

$M = \frac{Y}{5}$ (Y, 5 से विभाजित है। इसलिए $Y=0$ या 5)

ऊपर से, यदि $Y=0$, $Y+Y+Y=0+0+0=0$, $M=0$

यदि $Y=5$, $Y+Y+Y=5+5+5=15$, $MY=15$ अतः $M=1, Y=5$

उदाहरण 8: $A2-15 = 5A$, में A2 और 5A दो अंकों की संख्या हो तो A का मूल्य ज्ञात करो।

हल : $2-5=a$ संभव है।

जब $12-5=7$,

तो $A=7$

या

$(10A+2)-(10+5) = 50+A$

$10A-13 = 50+A$

$9A = 63$

$A = 7$

उदाहरण 9: $5A1-23A=325$ में 5A1 और 23A तीन अंकों की संख्या हो तो A का मूल्य ज्ञात करो

हल : $1-A = 5$?

अतः $11-A=5$,

तो $A=6$

या

$(500+10A+1)-(200+30+A) = 325$

$501-230+10A-A=325$

$271+9A=325$

$271+9A=325$

$271-271+9A=325-271$

$9A=54$

$A = 6$

उदाहरण 10: $1A \times A = 9A$ में $1A$ और $9A$ दो अंकों की संख्या हो तो A का मूल्य ज्ञात करो ।

हल : $A \times A = A$ के लिये था

वर्गीय पहाडे 1, 5, 6

$1\times1=1,$

$5\times5=25,$

$6\times6=36,$

यदि $A=6,$

$16\times6=96$

या

$$(10+A)A = (90+A)$$
$$10A+A^2 = 90+A$$
$$A^2+9A-90 = 0$$
$$A^2+2.A\left(\frac{9}{2}\right)+\left(\frac{9}{2}\right)^2-\left(\frac{9}{2}\right)^2-90 = 0$$
$$\left(A+\frac{9}{2}\right)^2-\frac{81}{4}-90 = 0$$
$$\left(A+\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{441}{4}$$
$$A+\frac{9}{2}=\frac{21}{2}$$
$$A=\frac{12}{2}=6$$

उदाहरण 11 : $BA \times B3 = 57A$ में BA और $B3$ दो अंकों की संख्या, $57A$ तीन अंकों की संख्या हो तो A और B का मूल्य ज्ञात करो ।

हल : इस उदाहरण में हम अंकों के मूल्यों का निरुपण गुणा के पहाडों से परीक्षा एवं दोष विधि से करेंगे । इकाई के स्थान में $A \times 3 = A$. के लिए गुणनफल की इकाई स्थान का अंक वही अंक बन जाता है। इसलिए A नं. है न 5 है । यदि दहाई के स्थान पर लिया जाय तो दो अंकों की संख्या का मूल्य 19 होगा आर गुणनफल $19\times19=361$ हो सकता है, जो 500. से कम है । आगे यदि हम दहाई के स्थान पर 3 लेते हैं तो दो अंकों की संख्या का न्यूनतम मूल्य $30\times30=900$ है जो 500 से अधिक है। तो दहाई के स्थान में दो होगा। तो $20\times23 = 460$ or $25\times23 = 575$.

आवश्यक उत्तर $25\times23 = 575$.

इसे कीजिए: :

1. यदि 21358AB से विभाजित है तो 99, A और B के मूल्य ज्ञात करो ।
2. संख्या 4AB8 (A , B अंक है) A और B के मूल्यों को ज्ञात करो जबकि वह 2,3,4,6,8 और 9 से विभाजित है।

उदाहरण 12: दिये गये गुणा में अक्षरों के मूल्यों को ज्ञात करो ।

$$\begin{array}{r} AB \\ \times\ 5 \\ \hline CAB \end{array}$$

हल: यदि $B = 0$ या 1 या 5 तो $0 \times 5 = 0$, $1 \times 5 = 5$, $5\times 5 = 25$

यदि $B = 0$, तो $A0 \times 5 = CA0$

यदि हम $A = 5$ लेते है तो $50 \times 5 = 250$

$\therefore$ CAB = 250 .

प्रयास कीजिए:

1. यदि YE × ME = TTT तो Y +E + M + T का मूल्य ज्ञात करो ।

   [सूचन : TTT = 100T + 10T + T = T(111) = T(37 × 3)]

2. यदि 88 वस्तुओं का मूल्य A733B है तो A और B के मूल्यों को ज्ञात करो।

अभ्यास -15. 5

1. निम्न में अविद्यमान अंकों को ज्ञात करो ।

(a) $\begin{array}{r} 1\,1\,1 \\ +\quad A \\ +\ 7\,7 \\ \hline 1\,9\,7 \\ \hline \end{array}$ (b) $\begin{array}{r} 2\,2\,2 \\ +\quad 8 \\ +\ B\,B \\ \hline 2\,8\,5 \\ \hline \end{array}$ (c) $\begin{array}{r} A\ A\ A \\ +\quad 7 \\ +\ A\ A \\ \hline 3\ 7\ 3 \\ \hline \end{array}$ (d) $\begin{array}{r} 2\,2\,2\,2 \\ +\quad 9\,9 \\ +\quad 9 \\ A\,A\,A \\ \hline 2\,9\,9\,A \\ \hline \end{array}$ (e) $\begin{array}{r} B\,B \\ +\quad 6 \\ A\,A\,A \\ \hline 4\ 6\ 1 \\ \hline \end{array}$

2. निम्न में A का मूल्य ज्ञात करो ।

(a) 7A – 16 = A9 (b) 107 – A9 = 1A (c) A36 – 1A4 = 742

3. निम्न दी गई अक्षरों के लिए संख्यात्मक मूल्य ज्ञात करो ।

(a) $\begin{array}{r} \boxed{D}\boxed{E} \\ \times\ 3 \\ \hline \boxed{F}\boxed{D}\boxed{E} \\ \hline \end{array}$ (b) $\begin{array}{r} \boxed{G}\boxed{H} \\ \times\ 6 \\ \hline \boxed{C}\boxed{G}\boxed{H} \\ \hline \end{array}$

4. अक्षरों को उचित अंकों से प्रतिस्थापित कीजिए ।

(a) 73K ÷ 8 = 9L (b) 1MN ÷ 3 = MN

5. यदि ABB × 999 = ABC123 (जहाँ A, B, C अंक है) A, B, C के मूल्य ज्ञात करो ।

15.6 स्थानीय मान के शेषांक से विभाजकता को ज्ञात करना ।

इस विधि में, दी गई संख्या से स्थानीय मान को विभाजित करके उनके शेष लेते हैं। यदि हम एक संख्या के स्थानीय मान को 7 से विभाजित करते हैं तो शेष निम्न प्रकार प्राप्त होते हैं ।

1000 ÷ 7 (शेष 6 है। इसे हम 6 – 7 = –1 ले सकते हैं ।)

100 ÷ 7 (शेष 2 है।)

10 ÷ 7 (शेष 3 है।)

1 ÷ 7 (शेष 1है।)

स्थानीय मान	10^8	10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
7 से विभाजित करने पर प्राप्त शेषांक	3	2	1	-2	-3	-1	2	3	1

जाँच करना है कि 562499,7 से विभाजित है या नहीं ।

अंक	5	6	2	4	9	9
स्थानीय मान	5×10^5	6×10^4	2×10^3	4×10^2	9×10^1	9×10^0
7 से विभाजित करने पर प्राप्त शेषांक	$5\times(-2)$	$6\times(-3)$	$2\times(-1)$	4×2	9×3	9×1

अंक और स्थानीय मान के शेष के मूल्यों के गुणनफल का योग $-10-18-2+8+27+9=-30+44=14$(7 से विभाजित है।)

इसलिए 562499, 7 से विभाजित है।

इसे कीजिए:

1. ऊपर की विधि से जाँच कीजिए कि 7810364 ,4 से विभाजित है कि नहीं ।
2. ऊपर की विधि से जाँच कीजिए कि 963451, 6 से विभाजित है कि नहीं।

15.7 विभाजन के नियमों पर कुछ और पलेलियाँ :

उदाहरण 13: क्या गुजरबंध(palindrome) का प्रत्येक सम संख्या '11' से विभाजित है।

हल : गुजरबंध की एक सम संख्या 12344321. को लीजिए । विषम स्थान के अंको का योग $1+3+4+2$ है । सम स्थान के अंकों का योग $2+4+3+1$ है । इनका अंतर 0 है। इसलिए यह 11 से विभाजित है।

उदाहरण 14: क्या 10^{1000}-1, 9 और 11 से विभाजित है ?

हल : 10^{1000}-1 as 999 .... 999 (1000 बार) लिखेंगे । सभी स्थानों पर अंक 9 है । इसलिए यह 9 से विभाजित है । और 1000 है। विषम स्थान के अंकों का योग और सम स्थान के अंकों का योग समान है। उनका अंतर 0 है । इसलिए यह 11 से विभाजित है।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए:

1. क्या हम निष्कर्ष ले सकते हैं कि 10^{2n}-1, 9 और 11 से विभाजित है ? समझाओं ।
2. क्या 10^{2n+1}-1,11 से विभाजित है या नहीं समझाओ ।

उदाहरण 15: 6 अंकों की संख्या बनाने के लि एक दो अंकों की संख्या को तीन बार लिखिए । जाँच कीजिए कि यह 3 से विभाजित है या नहीं ?

हल : हम दो अंको की संख्या 47 को लेंगे। 6 अंकों की संख्या बनाने के लिए इसे तीन बार लिखेंगे तो वह 474747 होगा ।

474747 को 47(10101) लिख सकते हैं। 10101, 3 से विभाजित है, क्योंकि इसके अंकों को योग $1 + 1 + 1 = 3$ है तो 474747 भी 3 से विभाजित है।

उदाहरण 16: 6 अंकों की संख्या बनाने के लिए एक तीन अंकों की संख्या को दो बार लिखिए । जाँच कीजिए कि यह 7 आर 11 से विभाजित है या नहीं ।

हल: हम एक 3 अंकों की संख्या 345 को लेंगें । 6 अंको की संख्या बनाने के लिए इसे दो बार लिखेंगे तो वह 345345 होगा ।

345345 को $345345 = 345000 + 345 = 345\ (1000 + 1)$

$= 345\ (1001)$

$= 345\ (7 \times 11 \times 13)$

इसलिए 345345,7, 11 और 13 से विभाजित

प्रयास कीजिए :

1. जाँच कीजिए कि 456456456456,7, 11 और 13 से विभाजित है या नहीं ?

उदाहरण 17: समान अंको की एक तीन अंकों की संख्या को लीजिए । अंको को जोडने से प्राप्त संख्या से विभाजित करे । आपने क्या निरीक्षण किया ? (अंकों को जोडने से संख्या का लघु रूप प्राप्त होगा ?

हल: 444 को लीजिए । अंकों को जोडने से $4 + 4 + 4 = 12$

अब 444 को 12 से विभाजित कीजिए $444 \div 12 = 37$ इस क्रिया को 333 , 666 आदि से साथ दोहराइए । आपको आश्चर्य होगा कि सभी संख्याओं के लिए भागफल 37 है।

उदाहरण 18: क्या $2^3 + 3^3$,(2 + 3) से विभाजित है या नहीं ?

हल: हमें मालूम है कि $a^3 + b^3 = (a + b)\ (a^2 - ab + b^2)$.

तो $2^3 + 3^3 = (2 + 3)\ (2^2 - 2 \times 3 + 3^2)$ यह $(2 + 3)$ का गुणक है।

इसलिए $2^3 + 3^3$,(2 + 3) से विभाजित है।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए :

1. ‘a’ और ‘b’ के लिए के लिए भिन्न प्राकृतिक संख्याओं को लेते हुए जाँच कीजिए कि $a^5 + b^5$, $(a + b)$ विभाजित है या नहीं ?
2. क्या हम यह निष्कर्ष कर सकते है कि $(a^{2n+1} + b^{2n+1})$,(a + b) से विभाजित है ?

15.8 क्रमागत संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए :

बिना जोडे हम 1 से 100 तक के क्रमागत संख्याओं का योगफल ज्ञात कर सकते हैं।

$1 + 2 + 3 + \ldots + 50 + 51 + \ldots + 98 + 99 + 100$

$= (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) \ldots\ldots (50 + 51)$

$= 101 + 101 + 101 + \ldots\ldots\ldots$ 50 जोडियाँ है $= 50 \times 101 = 5050$

इसे, $\dfrac{100 \times 101}{2} = 5050$ भी लिख सकते है ।

यदि 48 संख्याएँ है, तो योगफल क्या होगा? आपने क्यी निरीक्षण किया ?

यदि 'n' संख्याएँ है तो, तो योगफल $\dfrac{n(n+1)}{2}$ होगा ।

उदाहरण 19: 50 से 85 में 5 से विभाजित संख्याओं का योगफल ज्ञात करो ।

हल: 50 से 85 में 5 से विभाजित संख्याओं का योग =

(1 से 85 में 5 से विभाजित संख्याओं का योग) – (1 से 49 में 5 से विभाजित संख्याओं का योग)

$= (5 + 10 + \ldots + 85) - (5 + 10 + \ldots + 45)$

$= 5(1 + 2 + \ldots + 17) - 5(1 + 2 + \ldots + 9)$

$$= 5 \times \left(\frac{17 \times \cancel{18}^{9}}{\cancel{2}}\right) - 5 \times \left(\frac{9 \times \cancel{10}^{5}}{\cancel{2}}\right)$$

$= 5 \quad 9 \times 17 - 5 \times 9 \times 5$

$= 5 \times 9 \times (17 - 5)$

$= 5 \times 9 \times 12 = 540$

उदाहरण 20: 1 से 100 में 2 या 3 से विभाजित संख्याओं का योगफल ज्ञात करो ।

हल: 1 से 100 तक की संख्याओं में 2 से विभाजित संख्याएँ 2, 4, ... 98, 100 है ।

1 से 100 तक की संख्याओं में 3 से विभाजित संख्याएँ 3, 6, ... 96, 99 है ।

2 यो 3 से विभाजित संख्याओं का योग = (1 से 100 तक की संख्याओं में 2 से विभाजित संख्याएँ)+ 3 से विभाजित संख्याएँ)- (1 से 100 के बीच,6 से विभाजित संख्याओं का योग।

$= (2 + 4 + \ldots + 100) + (3 + 6 + \ldots + 99) - (6 + 12 + \ldots 96)$

$= 2(1 + 2 + \ldots + 50) + 3(1 + 2 + \ldots + 33) - 6(1 + 2 + \ldots + 16)$

$$= 2 \times \left(\frac{50 \times (50+1)}{2}\right) + 3 \times \left(\frac{33 \times (33+1)}{2}\right) - 6 \times \left(\frac{16 \times (16+1)}{2}\right)$$

$$= \cancel{2}\times\left(\frac{50\times 51}{\cancel{2}}\right)+3\times\left(\frac{33\times \cancel{34}^{17}}{\cancel{2}}\right)-6\times\left(\frac{{}^{8}\cancel{16}\times 17}{\cancel{2}}\right)$$

$$= 2550 + 1683 - 816$$

$$= 4233 - 816 = 3417$$

अभ्यास– 15.6

1. 1 से 100, संख्याओं में 5 से विभाजित पूर्णांकों को योगफल ज्ञात करो ।
2. 11 से 50, संख्याओं में 5 से विभाजित पूर्णांकों को योगफल ज्ञात करो ।
3. 1 से 50, संख्याओं में 2 और 3 से विभाजित पूर्णांकों को योगफल ज्ञात करो ।
4. $(n^3 - n)$, 3 से विभाजित है। कारण को समझाइए ।
5. 'n' क्रमागत विषम संख्याओं को योगफल 'n' से विभाजित है। कारण को समझाइए ।
6. क्या $1^{11} + 2^{11} + 3^{11} + 4^{11}$, 5 से विभाजित है ? समझाइए ।
7.

दिये गये चित्रों में आयतों में रहने वाले संख्याओं को ज्ञात करो ?

8. राहुल के पिताजी राहुल के जन्मदिन पर प्रति वर्ष कुछ पैसे उसके लिए जमा करना चाहते हैं। प्रथम जन्मदिन पर रु. 100, दूसरे जन्मदिन पर रु.300, और तीसरे जन्मदिन पर रु.600, चौथे जन्मदिन पर रु.1000 इस प्रकार जमा करते हैं । 15 वें जन्मदिन पर राहुल के पिताजी कितने पैसे जमा करेंगे।
9. 1 से 100, संख्याओं में 2 और 5 से विभाजित पूर्णांकों को योगफल ज्ञात करो।
10. 11 से 1000, संख्याओं में 3 से विभाजित पूर्णांकों को योगफल ज्ञात करो।

हमने क्या सीखा ?

1. एक 3 अंकों की संख्या को विस्तार रूप से $100a + 10b + c$. लिखना और समझना जहाँ a, b, c 0 से 9 तक के योग है, $a \neq 0$
2. सामान्य रूप में दो और तीन अंकों की संख्याओं के लिए 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 के विभाजन के नियमों को व्युत्पन्न करना।
3. 2, 3, 4, 5, 6, 7,8, 9, 10, 11 के विभाजन के नियमों के पीछे छिपा तर्क।
4. संख्याओं की पहेलियाँ और खेल।

उत्तर

1. परिमेय संख्याएँ

अभ्यास - 1.1

I.

(i) योज्य तत्समक

(ii) वितरण का नियम

(iii) गुणनात्मक तत्समक

(iv) गुणनात्मक तत्समक

(v) योग क्रमविनिमेय

(vi) गुणन के अंतर्गत संवृत

(vii) योज्य प्रतिलोम नियम

(viii) गुणात्मक प्रतिलोम

(ix) वितरण का नियम

2. (i) $\frac{3}{5}, \frac{-5}{3}$ (ii) $-1, 1$ (iii) 0, अपरिभाषित (iv) $\frac{-7}{9}, \frac{9}{7}$

(v) $1, -1$

3. (i) $\frac{-12}{5}$ (ii) 0 (iii) $\frac{9}{11}$ (iv) $\frac{6}{7}$

(v) $\frac{3}{4}, \frac{1}{3}$ (vi) 0

4. $\frac{-28}{55}$

5. गुणन साहचर्य, गुणन प्रतिलोम, गुणन तत्समक, योग के अंतर्गत संवृत

7. $\frac{28}{15}$

8. (i) $\frac{-5}{12}$ (ii) $\frac{58}{13}$ (iii) $\frac{45}{7}$

9. $\frac{-7}{8}$

10. $\frac{53}{6}$

11. साहचर्य नहीं क्योंकि $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4} \neq \frac{1}{2}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$

13. (i) प्राकृतिक संख्याएँ (ii) 0 (iii) ऋणात्मक

अभ्यास - 1.3

1. (i) $\frac{57}{100}$ (ii) $\frac{22}{125}$ (iii) $\frac{100001}{100000}$ (iv) $\frac{201}{8}$

2. (i) 1 (ii) $\frac{19}{33}$ (iii) $\frac{361}{495}$ (vi) $\frac{553}{45}$

3. (i) $\frac{7}{13}$ (ii) $\frac{-7}{5}$

4. $\frac{-62}{65}$ 5. 140 6. $5\frac{1}{10}$m 7. ₹. 1.66

8. $161\frac{1}{5}\text{m}^2$ 9. $\frac{3}{4}$ 10. $\frac{16}{9}$m 11. 125

2. एक चर वाले रैखिक समीकरण

अभ्यास - 2.1

1.(i) 2 (ii) −3 (iii) −6 (iv) 6

(v) $\frac{-3}{2}$ (vi) −21 (vii) 27 (viii) 5

(ix) $\frac{7}{3}$ (x) 1 (xi) $\frac{1}{2}$ (xii) 0

(xiii) $\frac{25}{7}$ (xiv) $\frac{21}{16}$ (xv) $\frac{8}{3}$ (xvi) $\frac{13}{6}$

अभ्यास - 2.2

1.(i) 67^0 (ii) 17^0 (iii) 125^0 (iv) 19^0 (v) 20^0

2. 5, 13 3. 43, 15 4. 27, 29

5. 252, 259, 266 6. 20 किमी 7. 99ग्रा, 106ग्रा, 95ग्रा 8. 113मी, 87मी

9. 16मी, 12मी 10. 21मी, 21मी, 13मी

11. 39^0, 59^0 12. 20 वर्ष, 28 वर्ष

13. 126 14. 80, 10 15. 60, 48 16. 59 फीट, 29.5 फीट

17. 186, 187.

अभ्यास - 2.3

1. 1
2. 2
3. $\frac{11}{4}$
4. -1
5. $\frac{-9}{5}$
6. 1
7. 7
8. $\frac{-4}{7}$
9. $\frac{9}{2}$
10. $\frac{11}{3}$
11. 1
12. -96
13. 3
14. 8

अभ्यास- 2.4

1. 25
2. 7
3. 63
4. 40, 25, 15
5. 12
6. 4, 2
7. 16
8. 10,000

अभ्यास - 2.5

1.(i) $\frac{145}{21}$ (ii) 168 (iii) 12 (iv) 25

(v) $\frac{127}{12}$ (vi) 1 (vii) $\frac{9}{2}$ (viii) $\frac{5}{12}$

(ix) $\frac{9}{23}$ (x) -1 (xi) $\frac{-1}{7}$ (xii) $\frac{3}{7}$

2. 30
3. 48, 12
4. $\frac{3}{7}$
5. 50,51,52
6. 25
7. 5
8. एक रुपये के सिक्के : 14; 50 पैसे के सिक्के = 42
9. 30 days
10. 20 km
11. 36
12. ₹ 860
13. 16

4. घातांक और घात

अभ्यास - 4.1

1.(i) $\frac{1}{64}$ (ii) -128 (iii) $\frac{64}{27}$ (iv) $\frac{1}{81}$

2.(i) $\left(\frac{1}{2}\right)^{15}$ (ii) $(-2)^{14}$ (iii) 5^4 (iv) 5^5 (v) $(-21)^4$

3.(i) $2^4 \times 3$ (ii) $\frac{1}{2}$

4.(i) 10 (ii) 40^3 (iii) $\frac{13}{16}$ (iv) $\frac{2}{81}$

(v) $\frac{17}{6}$ (vi) $\frac{16}{81}$ 5. (i) 625 (ii) 625

6.(i) 10 (ii) -10 (iii) 2 7. 3

8. $\frac{4^5}{3^4 \times 5}$ 9. (i) 1 (ii) 72 (iii) -24 (iv) 1

10. $\frac{16}{49}$

अभ्यास - 4.2

1.(i) 9.47×10^{-10} (ii) 5.43×10^{11} (iii) 4.83×10^{7} (iv) 9.298×10^{-5}

(v) 5.29×10^{-5}

2.(i) 4,37,000 (ii) 5,80,00,000 (iii) 0.00325 (iv) 37152900

(v) 0.03789 (vi) 0.02436

3.(i) 4×10^{-7} m (ii) 7×10^{-6} mm (iii) 3×10^{8} m/sec (iv) 3.84467×10^{8}

(v) $1.6x10^{-19}$ कूलंब (vi) 1.6×10^{-3} cm (vii) 5×10^{-6} cm

4. 1.0008×10^2 मिमी

5.(i) नहीं (ii) नहीं (iii) नहीं (iv) नहीं (v) नहीं

5. राशियों की तुलना

अभ्यास - 5.1

1.(i) 3:4 (ii) 32:3 (iii) 1 : 2 2. (i) 168

3. 8 4. 48 5. 20 6. $\frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{3}$

7. 3 : 5 8. 4 : 7 9. ₹ 8320

10. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$, हाँ 11. ₹ 28.5, ₹ 92, ₹ 257.6, ₹ 132, ₹ 88

12. (a) 83 (b) 1992 सदस्य 13. 2064 थेले 14. 70 से.मी.

अभ्यास - 5.2

1. 81.9 करोड़ 2. 2756.25 3. ₹ 7.67 4. 3 × 6सेमी

5. ₹ 127.50 6. $6\frac{1}{4}\%$ 7. 17%

8. ₹ 880, 10%, ₹ 4,000, 20%, ₹ 10,000, 20%, लाभ, ₹ 392, ₹ 42, ₹ 315, ₹ 35.

9. ₹ 2244 10.₹ 1250 11.₹ 40,000, 12.5% 12. लाभ ₹ 30,000, 17.65 %

13. ₹1334 14. (i) ₹ 10,000 (ii) ₹ 2,800 (iii) ₹ 200

15. (i) ₹ 540 (ii) ₹ 5040 16. 13

अभ्यास- 5.3

1. (a) 268.75 2. ₹ 19,950 3. A = 8820, 820

4. ₹ 734.50 5. 1449.1 6. 81,82,199 7. ₹ 1080.56

8. (i) 400 (ii) 610 9. ₹ 43.20 10. 5,31,616

11. ₹ 36659.70 12. ₹ 362.50 भारती 13. ₹ 9500

14. 1297920 15. ₹ 103.81

6. वर्गमूल और घनमूल

अभ्यास - 6.1

1.(i) 39 के वर्ग में इकाई अंक1 है।

(ii) 297 के वर्ग में इकाई अंक 9 है।

(iii) 5125 के वर्ग में इकाई अंक5 है।

(iv) 7286 के वर्ग में इकाई अंक6 है।

(v) 8742 के वर्ग में इकाई अंक 4 है।

2. पूर्ण वर्ग हैं-

(i) 121 (ii) 256

3.(i) 257 में इकाई अंक 7 है और इसलिए यह एक पूर्ण वर्ग नहीं है।

(ii) 4592 इकाई अंक 2 है और इसलिए यह एक पूर्ण वर्ग नहीं है।

(iii) 2433 इकाई अंक 3 है और इसलिए यह एक पूर्ण वर्ग नहीं है।

(iv) 5050 इकाई अंक 0 और अंत में एक ही शून्य है इसलिए यह एक यह एक पूर्ण वर्ग नहीं है।

(v) 6098 इकाई अंक 8 है और इसलिए यह एक पूर्ण वर्ग नहीं है।

4. (i) 431^2 - विषम (ii) 2826^2 - सम (iii) 8204^2 - सम

(iv) 17779^2 - विषम (v) 99998^2 - सम

5. (i) 50 (ii) 112 (iii) 214

6. (i) 25 (ii) 81 (iii) 169

अभ्यास - 6.2

1. (i) 21 (ii) 28 (iii) 64 (iv) 84

2. 5 3. 6. 120 4. 6 5. 39

6. 51 7. 144, 9 8. 89 9. 4608 वर्ग मी

अभ्यास- 6.3

1. (i) 33 (ii) 48 (iii) 88 (iv) 78

(v) 95

2. (i) 1.6 (ii) 4.3 (iii) 8.3 (iv) 9.2

3. 31 4. 67 cm 5. 91 6. 1024

7. 149 8. (i) 10 (ii) 16 (iii) 28

अभ्यास - 6.4

1. (i) 512 (ii) 4096 (iii) 9261 (iv) 27000

2. i) 243 - एक पूर्ण घन नहीं है ii) 516 - एक पूर्ण घन नहीं है

iii) 729 - एक पूर्ण घन है vi)8000 - एक पूर्ण घन है

v) 2700 - एक पूर्ण घन नहीं है

3. 2 4. 17 5. 5 6. 288 7. 2

अभ्यास - 6.5

1. (i) 7 (ii) 9 (iii) 11 (iv) 14

1. (i) 16 (ii) 13 (iii) 15 (iv) 18

3. i) सत्य ii) असत्य iii) सत्य

vi) सत्य v) असत्य vi) असत्य

7. बारंबारिता बंटन तालिका और आलेख

अभ्यास 7.1

1. ₹.11060.83 2. $\bar{x} = 7$ 3. $\bar{x} = 27$ 4. $\bar{x} = 43$

5. $\bar{x} = 30$ वर्ष 6. 52 वर्ष

7. $\bar{x} = 12$ विचलनों के योगफल से $\bar{x} = 0$

8. 5 9. $\bar{x} = 13.67$ सभी परिस्थितियों में समान 10. 15.3 अंक

11. $\bar{x} = 30$ 12. माध्यिका = 3.4 13. $x = 18$

14. बहुलक = 10 15. बहुलक = $x - 3$ 16. बहुलक = 1

17. 12, 16, 16, 16 18. 42 19. 8 20. 20

अभ्यास - 7.2

1.

वर्गांतर	5-14	15-24	25-34	35-44	45-54	55-64
बारंबारिता	9	9	9	6	7	5

2.

छात्रों की संख्या	15-19	19-23	23-27	27-31	31-35	35-39	39-43
बारंबारिता	5	7	6	5	5	1	1

3.

वर्गांतर	4-11	12-19	20-27	28-35	36-43	44-51	52-59
सीमाएँ	3.5-11.5	11.5-19.5	19.5-27.5	27.5-35.5	35.5-43.5	43.5-51.5	51.5-59.5

4.

प्राप्तांक	बारंबारिता	वर्गांतर	आरोही	अवरोही
10	6	4-16	6	75
22	14	16-28	20	69
34	20	28-40	40	55
46	21	40-52	61	35
58	9	52-64	70	14
70	5	64-76	75	5

5.

वर्गांतर (प्राप्तांक)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
छात्रों की संख्या	2	10	4	9	10

6.

वर्गांतर (आयु)	बारंबारिता छात्रों की संख्या	वर्गांतर सीमाएँ	आरोही संचित बारंबारिता	अवरोही संचित बारंबारिता
1 - 3	10	0.5 - 3.5	10	59
4 - 6	12	3.5 - 6.5	22	49
7 - 9	15	6.5 - 9.5	37	37
10 - 12	13	9.5 - 12.5	50	22
13 - 15	9	12.5 - 15.5	59	9

7.

वर्गांतर	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
आरोही.सं. बा.	3	8	19	25	30
बारंबारिता	3	5	11	6	5

दी गई बारंबारिताएँ, आरोही संचित बारंबारिताएँ हैं।

8.

वर्गांतर	1-10	11-20	21-30	31-40	41-50
अवरोही.सं. बा.	42	36	23	14	6
बारंबारिता	6	13	9	8	6

8.ज्यामितीय आकारों को समझना

अभ्यास - 8.1

2. (a) हाँ, कोई दो सर्वसमान आकृतियाँ हमेशा समरूप ही होती हैं।

   (b) हाँ, समरूपता बनी रहेगी

3. AB = NM; $\angle A = \angle N$

   BC = MO; $\angle B = \angle M$

   CA = ON; $\angle C = \angle O$

4. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) असत्य

   (v) सत्य

7. 1.5 मी, 3मी, 4.5मी, 6मी, 7.5मी, 9मी

8. 9मी

9. समतल आकारों का क्षेत्रफल

अभ्यास 9.1

2. (i) 20 वर्ग सेमी (ii) 424 वर्ग सेमी (iii) 384 वर्ग सेमी

3. 96 वर्ग सेमी 4. 96 वर्ग सेमी 5. (i) 10700 वर्ग मी (ii) 10650 वर्ग मी

6. (ii) x = 75 सेमी, 45 सेमी

7. ₹ 4050

8. 337.5 sqcm.

अभ्यास - 9.2

1. (i) 900 वर्ग सेमी, (ii) 361 वर्ग सेमी 2. 616 वर्ग सेमी
3. (i) 693 वर्ग सेमी, (ii)259.87 वर्ग सेमी,
4. 5544 वर्ग सेमी, 5. 308 वर्ग सेमी, 6.10.5 वर्ग सेमी, 7. 7.868 वर्ग सेमी,
8. (i) $\frac{6}{7}a^2$ (ii) 123.5 वर्ग सेमी, 9. 6.125 वर्ग सेमी, 10. 346.5 वर्ग मी,

10. सीधा और व्युत्क्रम अनुपात

अभ्यास 10.1

1. ₹ 84, ₹ 168, ₹ 420, ₹ 546 2. 32, 56, 96, 160
3. ₹ 12,600/- 4. ₹ 2,100/- 5. 21 सेमी 6. 6मी, 8.75 मी
7. 168 कि.मी, 8. 5,000 9. 25 कि.मी $\frac{10}{3}$ घंटे 10. $\frac{9}{20}$ सेमी, 11. 2 : 1

अभ्यास - 10.2

1. (ii) 2. 120, 60,80,80

अभ्यास - 10. 3

1. 4 किग्रा 2. 50 दिन 3. 48 4. 4 5. 4
6.15 दिन 7. 24 8. 60 मिनट 9. 40% 10. $\frac{(x+1)^2}{x+2}$

11. बीजीय व्यंजक

अभ्यास - 11.1

1. (i) 42K (ii) $6lm$ (iii) $15t^4$ (iv) 18mn
   (v) $10p^3$
3. $60a^2c$
   $24m^3n$
   $36\,k^3l^3$
   $24p^2q^2r^2$
4. i) x^5y^3 ii) a^6b^6 iii) $k^3l^3m^3$ iv) $p^2q^2r^2$
   v) $72a^2bcd$ 5. $x^2y^2z^2$ 6. x^3y

अभ्यास- 11.2

1. (ii) $3k^2l + 3klm + 3kmn$ (iii) $a^2b^2 + ab^4 + a^2b^2c^2$
   (iv) $x^2yz - 2xy^2z + 3xyz^2$ (v) $a^4b^3c^3 + a^2b^4c^3d - a^3b^3c^2d^2$
2. $12y^2 + 16y$
3. i) -2 ii) 0
4. $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$
5. $x^2 - y^2 - z^2 + 2xy - yz + zx - xr + yr$
6. $-7x^2 + 8xy$
7. $-3k^2 + 21kl - 21km$
8. $a^3 + b^3 + c^3 - a^2b + b^2a - b^2c + c^2b + a^2c - c^2a$

अभ्यास - 11.3

1. (i) $6a^2 - 19a - 36$ (ii) $2x^2 - 5xy + 2y^2$ (iii) $k^2l - kl^2 - l^2m + klm$
   (iv) $m^3 + m^2n - mn^2 - n^3$
2. (i) $2x^2 - 3xy + 3x^2y + 3xy^2 - 5y^2$
   (ii) $3a^2b^2 - a^3b - 2ab^3 - 3a^2bc + 3ab^2c$
   (iii) $klmn - lm^2n - k^2l^2 + kl^2m + k^2lm - klm^2$
   (iv) $p^4 - 5p^3q + 6p^3r + pq^3 + 6q^3r - 5q^4$
3. i) $10x^2 - 14xy$ ii) $m^3 + n^3$ iii) $-19a^2 - 34ab + 16ac - 3b^2 + 3c^2$
   iv) $p^2q^2 - q^2r^2 + p^2qr + pqr^2 - p^2q - pq^2 - p^2r + pr^2$
4. 8

अभ्यास- 11.4

1. i) $9k^2 + 24kl + 16l^2$ ii) $a^2x^4 + 2abx^2y^2 + b^2y^4$
   iii) $49d^2 - 126de + 81e^2$ iv) $m^4 + n^4$
   v) $9t^2 - 81s^2$ vi) $k^2l^2 - m^2n^2$
   vii) $36x^2 + 66x + 30$ viii) $4b^2 - 2ab + 2bc - ca$
2. i) 92416 ii) 259081 iii) 9,84,064 iv) 6,38,401
   v) 89,984 vi) 6391 vii) 11,772 viii) 42,024

12. गुणनखंडन

अभ्यास - 12.1

1. (i) 2, 4, 8 (ii) 3, a, 3a (iii) 7, x, y, 7x, 7y, 7xy (iv) 2, m, m^2, 2m, $2m^2$

(v) 5 (vi) 2, x, 2x (vii) 2, 3, 6, x, y, 2x, 2y, 2xy, 3x, 3y, 3xy, 6x, 6y, 6xy

2. i) $5x(x-5y)$ (ii) $3a(3a-2x)$ (iii) $7p(p+7q)$
 iv) $12a^2b(3-5c)$ (v) $3abc(a+2b+3c)$
 vi) $p(4p+5q-6q^2)$ (vii) $t(u+at)$

3. (i) $(3x-4b)(a-2y)$
 (ii) $(x^2+5)(x+2)$ (iii) $(m+4)(m-n)$
 (iv) $(a^2-b)(a-b^2)$ (v) $(p-1)(pq-r^2)$

अभ्यास - 12.2

1. (i) $(a+5)^2$ (ii) $(l-8)^2$ (iii) $(6x+8y)^2$ (iv) $(5x-3y)^2$
 (v) $(5m-4n)^2$ (vi) $(9x-11y)^2$ (vii) $(x-y)^2$ (viii) $(l^2+2m^2)^2$

2. (i) $(x+6)(x-6)$ (ii) $(7x+5y)(7x-5y)$ (iii) $(m+11)(m-11)$
 (iv) $(9+8x)(9-8x)$ (v) $(xy+8)(xy-8)$ (vi) $6(x+3)(x-3)$
 (vii) $(x+9)(x-9)$ (viii) $2x(1+4x^2)(1+2x)(1-2x)$
 (ix) $x^2(9x+11)(9x-11)$ (x) $(p-q+r)(p-q-r)$
 (xi) 4xy

3. (i) $x(lx+m)$ (ii) $7(y^2+5z^2)$ (iii) $3x^2(x^2+2xy+3z)$
 (vi) $(x-a)(x-b)$ (v) $(3a+4b)(x-2y)$ (vi) $(m+1)(n+1)$
 (vii) $(b+2c)(6a-b)$ (viii) $(pq-r^2)(p-1)$ (ix) $(y+z)(x-5)$

4. (i) $(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$ (ii) $(a^2+b^2+c^2+2bc)(a+b+c)(a-b-c)$
 (iii) $(l+m-n)(l-m+n)$ (iv) $\left(7x+\frac{4}{5}\right)\left(7x-\frac{4}{5}\right)$
 (v) $(x^2-y^2)^2$ (vi) $(5a-b)(5b-a)$

5. (i) $(a+6)(a+4)$ (ii) $(x+6)(x+3)$ (iii) $(p-7)(p-3)$
 (iv) $(x-8)(x+4)$ 6. 10 7. 0, 12

अभ्यास- 12.3

1. (i) $8a^2$ (ii) $\frac{1}{3}x$ (iii) $9a^2b^2c^2$ (iv) $\frac{1}{5}yz^2$
 (v) $-6l^2m$

2. (i) $3x-2$ (ii) $5a^2-7b^2$ (iii) $x(5x-3)$ (iv) $l(2l^2-3l+4)$

(v) $5abc(a - b + c)$ (vi) $(2q^2 + 3pq - p^2)$ (vii) $\frac{4}{3}(abc + 2bc)$

3. (i) $7x - 9$ (ii) $12x$ (iii) $\frac{77}{3}ab$ (iv) $\frac{27}{4}(m+n)$

(v) $4(x^2 + 7x + 10)$ (vi) $(a + 1)(a + 2)$

4. (i) $x + 4$ (ii) $x - 2$ (iii) $p + 4$ (iv) $5a(a - 5)$

(v) $10m(p - q)$ (vi) $4z(4z + 3)$

अभ्यास- 12.4

(i) $3(x - 9) = 3x - 27$ (ii) $x(3x + 2) = 3x^2 + 2x$

(iii) $2x + 3x = 5x$ (iv) $2x + x + 3x = 6x$

(v) $4p + 3p + 2p + p - 9p = p$ (vi) $3x \times 2y = 6xy$

(vii) $(3x)^2 + 4x + 7 = 9x^2 + 4x + 7$ (viii) $(2x)^2 + 5x = 4x^2 + 5x$

(ix) $(2a + 3)^2 = 4a^2 + 12a + 9$

(x) (a) 0 (b) 30 (c) -6

(xi) $(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$ (xii) $(x + 7)^2 = x^2 + 14x + 49$

(xiii) $(3a + 4b)(a - b) = 3a^2 + ab - 4b^2$ (xiv) $(x + 4)(x + 2) = x^2 + 6x + 8$

(xv) $(x - 4)(x - 2) = x^2 - 6x + 8$ (xvi) $5x^3 \div 5x^3 = 1$

(xvii) $(2x^3 + 1) \div 2x^3 = 1 + \frac{1}{2x^3}$ (xviii) $(3x + 2) \div 3x = 1 + \frac{2}{3x}$

(xix) $(3x + 5) \div 3 = x + \frac{5}{3}$

(xx) $\frac{4x+3}{3} = \frac{4}{3}x + 1$

13. 3-D और 2-D आकारों को देखना

अभ्यास- 13.1

3. (i) 5 (ii) 9 (iii) 20 (iv) 14

4. (i) 3 वर्ग इकाई (ii) 9 वर्ग इकाई (iii) 16 वर्ग इकाई (iv) 14 वर्ग इकाई

अभ्यास-13.2

1.

F	V	E	V + F = E + 2
5	6	9	संतृप्त
7	10	15	,,
8	12	18	,,
6	6	10	,,
5	5	8	,,
8	12	18	,,
8	6	12	,,
6	8	12	,,

2. सभी घन वर्गाकर प्रिज्म होते हैं लेकिन इसका विलोम सत्य नहीं रहता ।

3. नहीं 4. हाँ 5.F = 20, V = 6, E = 12, V + F – E = 2 6. नहीं

7.

V	E
8	12
5	8
6	9

8. (i)षटकोणीय पिरामिड (ii) घनाभ (iii)पंचकोणीय पिरामिड
(iv) बेलन (v) घन (vi)षटकोणीय पिरामिड
(vii) समलम्ब चतुर्भुज

9. (i) a, b, c, d, e (ii) (a) चतुष्फलक (b) गोला
(c) घन / घनाभ (d) गोला
(e) घन एक क्रमितीय बहुभुज है जो कि घनाभ नहीं है।
(f) घन, घनाभ (g) वर्ग पिरामिड

3. (a) अष्टकोणीय प्रिज्म (b) षटकोणीय प्रिज्म (c) त्रिकोणीय प्रिज्म
(d) पंचभुज पिरामिड

14. तलों का क्षेत्रफल और आयतन

अभ्यास- 14.1

1. A 2. 10 सेमी^{2} 3. 9 वर्ग मी

4. ₹ 72

अभ्यास - 14.2

1. (i) 112.996 घन मी (ii) 70 घन मी (iii) 22.5 घन मी
2. (i) 13.92 घन मी, 13920 लीटर (ii) 5.2 घन मी, 5200 लीटर

   (iii) 36.792घन मी, 36792 लीटर
3. आयतन $\frac{7}{8}$ भाग कम होगा।
4. (i) 262.144 वर्ग मी (ii) 2.197 घन मी (iii) 4.096घन मी
5. 6400 6. 1096 घन सेमी 7. 110घन सेमी
8. 90 9. 27 10. 6 सेमी

15. संख्याओं से खेल

अभ्यास - 15.1

1. 2 से विभाजित 1200, 836, 780, 4820, 48630

   5 से विभाजित 1200, 535, 780, 3005, 4820, 48630

   10 से विभाजित 1200, 780, 4820, 48630

   हमने देखा कि यदि एक संख्या 10 से विभाजित हो तो वह 2 और 5 से भी।
2. (a), (b), (c), (e) 2 से विभाजित
3. (a), (b), (c) (d) 5 से विभाजित
4. (a), (b), (d), (e) 10 से विभाजित
5. (a) 6 (b) 8 (c) 6 (d) 12 (e) 8
6. 10, 20, 30, 40, 50, 60, ... 7. 6

अभ्यास - 15.2

1. A = 2 or 5 or 8 2. A = 8
3. 90, 180, 270, 360, 450 etc.
4. 0 से 9. हम देखते हैं कि 2 की भाजनीयता केवल इकाई अंक पर ही आधारित होती है।
5. 0 या 5 6. 4
7. 7 8. ‘0’

अभ्यास - 15.3

1. (a), (d) विभाजित होते हैं 6 से
2. (a), (b), (c), (d) विभाजित होते हैं 4 से
3. (a), (c), (d) विभाजित होते हैं 8 से
4. (a), (b), (c), (d) विभाजित होते हैं 7 से
5. (a), (b), (c), (d), (e), (i), (j), (k) विभाजित होते हैं 11 से
6. 8 के सभी गुणांक 4 चार के भी गुणांक होते हैं
7. $A = 1$, $B = 9$, $A + B = 10$

अभ्यास - 15.4

1. 45 से विभाजित
2. 81 से विभाजित
3. 36 और इसके सभी गुणनखंडों से विभाजित
4. 42 और इसके सभी गुणनखंडों से विभाजित
5. 11 और 7 से और इन दोनों के गुणनफल से भी विभाजित
6. 5 और 7 से और इन दोनों के गुणनफल से भी विभाजित
7. दोनों संख्याएँ और उनके योग भी 6 से विभाजित
8. दोनों संख्याएँ और उनके अंतर भी 3 से विभाजित
9. 2 और 4 दोनों से विभाजित
10. 4 और 8 दोनों से विभाजित
11. $A = 3, B = 2$

अभ्यास - 15.5

1. (a) $A = 9$ (b) $B = 5$ (c) $A = 3$ (d) $A = 6$, योग $= 2996$
   (e) $A = 4, B = 1$
2. (a) $A = 5$ (b) $A = 8$ (c) $A = 9$
3. (a) $D = 5, E = 0, F = 1$
4. (a) $K = 6, L = 2$ (b) $M = 5, N = 0$
5. $A = 8, B = 7, C = 6$

अभ्यास - 15.6

1. 1050
2. 620
3. 216
4. $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$ तीन लगातार संख्याओं का गुणा
5. n तीन लगातार विषम संख्याओं के योग हैं- $\frac{(2n-1)(2n)}{2} = n(2x-1)$ 'n' का गुणांक
6. $(1^{11} + 4^{11}) + (2^{11} - 3^{11})$ विभाजित है 5 से
7. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$
8. रु. 12,000
9. 3050
10. 166833-18 = 166815.

पाठ्यक्रम

संख्या व्यवस्था (50 घंटे) (i) संख्याओं से खेल (ii) परिमेय संख्याएँ (iii) वर्ग संख्याएँ, घन संख्याएँ, वर्गमूल, घन, घनमूल	**(i) संख्याओं से खेल** • 2 और 3 अंकों वाली संख्याओं को (100a + 10b + c) के रूप में लिखना और समझना जहाँ a, b, c केवल (0-9) अंक ही हो सकते हैं और इनसे अनेक प्रकार की पहेलियों को समझना (किन्हीं चार मूलभूत संक्रियाओं से संबंधित चर या अचर राशि संबंधी पहेलियाँ) • संख्या पहेलियाँ और खेल • 2,3,4,5,6,7,8,9 और 11 से विभाजन नियम को समझना, दो या तीन अंकों वाली संख्या का व्यापक रूप।
	(ii) परिमेय संख्याएँ • परिमेय संख्याओं के लक्षण (इकाइयों के साथ) • लक्षणों को सामान्य व्यंजनों के माध्यम से दर्शाना। इन लक्षणों का महत्व समझना। • संख्या रेखा पर परिमेय संख्याओं को दर्शाना। • किन्हीं दो परिमेय संख्याओं के बीच आनेवाली परिमेय संख्याओं को पहचानना (बच्चों को दिखायें कि यदि हम दो परिमेय संख्याओं के बीच संगत परिमेय संख्याओं को खोजते हैं तो अनेक परिमेय संख्याएँ प्राप्त कर सकते हैं) • परिमेय संख्याओं को दशमलव एवं दशमलव को परिमेय संख्या में बदलना (हर 10, 100, ... आदि से भिन्न भी हो सकते हैं) • परिमेय संख्याओं की संक्रियाओं का सामान्यीकरण करना • परिमेय संख्याओं पर आधारित भाषिक समस्याएँ हल करना (सभी संक्रियाओं के लिए) • पभाषिक समस्याएँ (उच्च तार्किकता, सभी संक्रियाएँ, क्षेत्रफल आदि की युक्तियों के साथ)
	(iii) वर्ग संख्याएँ, घन संख्याएँ, वर्गमूल, घन, घनमूल • वर्ग संख्याएँ और वर्गूमल • गुणनखंडन विधि और संख्याओं के विभाजन विधि से वर्गूमल ज्ञात करना। (चार अंकों या उससे कम अंकोवाली और दो दशमलव स्थान तक की संख्याओं के लिए)

	• पाइथागोरस त्रिक ओर उसकी जाँच। • घन संख्याएँ और घनमूल (तीन अंकों तक की संख्याओं के गुणनखंडों की विधि से) • वर्गमूल और घनमूल का अनुमान लगाना। अभीष्ट संख्याओं के निकटतम पहुँचने की प्रक्रिया सीखना। • कोष्टकों का प्रयोग • बोडमास (BODMAS) नियम की सहायता से कोष्टकों को हल करना।
बीजगणित (**20** घंटे) **(i)** घातांक और घात **(ii)** बीजीय व्यंजक **(iii)** एक चरराशि वाले रेखीय समीकरण **(iv)** गुणनखंडन	**(i) घातांक और घात** • पूर्णांक घातांकों के रूप में • पूर्णांक घातों के घातांकों के नियम • संख्याओं के मानक रूप **(ii) बीजीय व्यंजक** • बीजगणितीय व्यंजकों का गुणा (गुणक पूर्णांक हों) • कुछ सामान्य त्रुटियाँ (उदाः $2 + x \neq 2x$, $7x + y \neq 7xy$) • सूत्र $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ • सूत्रों की ज्यामितीय जाँच **(iii)** एक चरराशि वाले रेखीय समीकरण • एक चरराशि वाले रेखीय समीकरण संबंधी गुणा और भाग की समस्याओं को हल करना (वाक्यरूपी समस्याएँ) **(iv)** बीजीय व्यंजक • गुणनखंडन (केवल सामान्य सवाल) • सामान्य गुणनखंडों का गुणनखंडन • पदों के समूह का गुणनखंडन • सार्वसम इकाइयों के प्रयोग द्वारा गुणनखंडन • $(x + a)(x + a)$ तरह के गुणनखंडन • बीजीय व्यंजकों का विभाजन

अंकगणित (20 घंटे) (i) राशियों की तुलना (ii) सीधा एवं व्युत्क्रम अनुपात	(i) राशियों की तुलना • अनुपात के प्रयोग द्वारा राशियों की तुलना • गुणन अनुपात-भाषिक समस्याएँ • प्रतिशत, लाभ, हानि, ऊपरी लागत, छूट, कर आदि पर आधारित समस्याएँ (बहुआयामी लेन-देन) • साधारण और चक्रवृद्धि व्याज में अंतर (चक्रवृद्धि व्याज वार्षिक दर पर केवल तीन वर्ष के और चक्रवृद्धि व्याज, अर्द्ध वार्षिक तीन चरणों तक)
	(ii) सीधा एवं व्युत्क्रम अनुपात • सीधा समानुपात- साधारण और सीधे शाब्दिक प्रश्न। सीधा एवं व्युत्क्रम अनुपात की मिश्र समस्याएँ। • समय और कार्य संबंधी सवाल- साधारण एवं सीधे वाक्यरूपी सवाल। • समय और दूरी : साधारण एवं सीधे वाक्यरूपी सवाल।
ज्यामितीय (40 घंटे) (i) चतुर्भुजों का निर्माण (ii) **3-D** व **2D** आकारों को दर्शाना (iii) ज्यामितीय आकारों को समझना	(i) **चतुर्भुजों का निर्माण** • चतुर्भुजों एवं उनके लक्षणों को जानना। • चतुर्भुजों की रचना • चार भुजाएँ एवं एक कोण • चार भुजाएँ वं तीन विकर्ण • दो संलग्न भुजाएँ, तीन कोण • तीन भुजाएँ और दो कर्ण • तीन भुजाएँ और दो कोण • दो विकर्णों की सहायता से विशिष्ट चतुर्भुज का निर्माण
	(ii) **3-D** व **2D** आकारों को दर्शाना • वस्तुओं की विविध आकृतियों के भाग पहचानिए और जोड़ी बनाइए। [अधिक जटिल जैसे- घोंसले जैसे आकार, 2-D और 3-D को जोड़ना (दो से अधिक नहीं) • 2-D एवं 3-D वस्तुओं को प्रस्तुत करना (क्रम में लगाना एवं बढ़ाना) सममितीय रेखाओं द्वारा • शीर्ष, फलक और सम्मुख पहचानना। 3-D आकृतियों में आइलर संबंधों को पहचानना (घन, घनाभ, चतुष्फलक, प्रिज्म/समपार्श्व और पिरामिड)

	(iii) ज्यामितीय आकारों को समझना • सर्वसमान आकार • समरूप आकार • ज्यामितीय आकारों की सममितता (त्रिभुज, चतुर्भुज और वृत्त के संदर्भ में)
क्षेत्रमिति (15 घंटे) **(i) समतल आकारों का क्षेत्रफल** **(ii) समतल का क्षेत्रफल एवं आयतन**	**(i) समतल आकारों का क्षेत्रफल** • हिरोन के सूत्र का प्रयोग करते हुए त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालना (बिना सिद्ध किए) और इसका प्रयोग चतुर्भुजों के क्षेत्रफल ज्ञात करने में करना। • समलंब का क्षेत्रफल • पंचभुजों और बहुभुजों का क्षेत्रफल • वृत्त और वृत्तकार पथ (वलय) का क्षेत्रफल **(ii) समतल का क्षेत्रफल एवं आयतन** • घन एवं घनाभ का क्षेत्रफल • आयतन, आयतन का मापन बुनियादी इकाइयों का प्रयोग करते हुए, घन और घनाभ का आयतन • आयतन एवं क्षमता
आँकड़ों का प्रबंधन (15 घंटे) **बारंबारिता तालिका एवं आलेख**	**बारंबारिता तालिका एवं आलेख** • मध्यमान, माध्यिका और बहुलक की असमूहबद्ध प्रदत्तों के लिए प्रयोग की पुनरावृत्ति • विचलन पद्धति से मध्यमान का निरूपण • शून्य समूहबद्ध प्रदत्तों की आवश्यकता एवं क्षेत्र • बारंबारिता बंटन तालिका की रचना • संचित बारंबारिता बंटन तालिका • बारंबारिता तालिका (सोपान आलेख, बारंबारिता बहुभुज, बारंबारिता वक्र, संचित बारंबारिता वक्र)

अपेक्षित दक्षताएँ

अपेक्षित दक्षताएँ स्पष्ट करता है कि क्या छात्र को क्या कर सकने में समर्थ होना चाहिए। नीचे इस आधार पर अपेक्षित दक्षताओं को नीचे वर्गीकृत कर दर्शाया जा रहा है।

समस्या समाधान

गणितीय समस्याओं को अपने विचारों और विधियों से हल कर पाना।

(a) समस्याओं के प्रकार

ये समस्याएँ एअनेक प्रकार की हो सकती हैं, जैसे- पहेली, वाक्यरूपी समस्याएँ, चित्रात्मक या आलेखीय एवं प्रदत्तों, तालिकाओं, ग्राफ आदि को पढ़ना व समझना।

(b) समस्या समाधान के सोपान

- समस्या पढ़ना व समझना
- सूचनाओं/प्रदत्तों के सभी अंशों को पहचानना
- संबंधित सूचनाओं को अलग करना
- समझना कि उसमें कौनसा गणितीय भाव है
- प्रविधियों, सूत्रों आदि को पुनःस्मरण करना
- प्रविधि का चयन करना
- उस प्रविधि का प्रयोग करते हुए समस्या हल करना
- अपने उत्तर एवं समस्या संबंधी प्रमेयों की जाँच करना

(c) जटिलता

समस्याओं की जटिलता इनपर आधारित होती है-

- संबंध जोड़ना (जैसा कि संबंधित भाग में दिया गया है)
- समस्या समाधान के सोपानों की संख्या
- समस्या समाधान में प्रयोग में आने वाली संक्रियाओं की संख्या
- समस्या समाधान के लिए बाह्य संदर्भों की आवश्यक मात्रा
- समस्या समाधान की प्रविधि का स्वरूप

तार्किक उपपत्तियाँ या सिद्ध करना

- विविध सोपानों के बीच तार्किकता (चर/अचर राशियों से संयुक्त)

- गणितीय सूत्रों व निष्कर्षों को समझते हुए संबंधित अनुमान लगाना
- प्रविधि की जाँच एवं समझना- तार्किक प्रसंगों की जाँच
- उपपत्तियों की संकल्पना समझना
- आगमन एवं निगमन संबंधी तर्क का भाव समझना
- गणितीय अनुमानों की जाँच करना

संचार (Communication)

- शाब्दिक एवं सांकेतिक गणितीय संकल्पनाओं को पढ़ना, लिखना, समझना व समझाना उदाहरण: $3 + 4 = 7$, $3 < 5$, $n_1+n_2= n_2+n_1$, कोणों का योग $= 180^0$
- गणितीय भावों का निर्माण
- गणितीय सिद्धांतों को अपने शब्दों में व्यक्त कर सकना, जैसे- एक वर्ग की चार समान भुजाएँ और चार समान कोण होते हैं।
- गणितीय प्रविधियों को व्यक्त करना, जैसे- दो अंकों वाली दो संख्याओं को जोड़ते समय पहले इकाई स्थान वाले अंक को जोड़ा जाये, फिर परिणाम के दहाई अंक (हासिल) को ध्यान में रखते हुए दहाई स्थान के अंकों को जोड़ना।
- गणितीय तर्क व्यक्त कर पाना

संबंध (Connections)

- गणितीय क्षेत्रों के संबंधित भावों में संबंध स्थापित कर सकना। उदाहरण के लिए- गुणा करते समय भाग व अनुपात में संबंध, पैटर्न और सममितता में संबंध, मापन एवं स्थान में संबंध आदि।
- गणितीय भावों को दैनिक कार्यों से सबंध स्थापित कर पाना
- गणित का अन्य विषयों से संबंध स्थापित कर पाना
- विविध गणितीय धारणाओं व क्षेत्रों में संबंध स्थापित कर पाना, जैसे- आँकड़ों का संचालन या अंक गणित और स्थल आदि में संबंध।
- विविध प्रविधियों में संबंध स्थापित कर पाना

कल्पनात्मक दर्शन एवं प्रस्तुतीकरण (Visualization & Representation)

- तालिका में दिये प्रदत्तों, संख्या रेखा, चित्रालेख, स्तंभ आलेख, 2-D आकार, 3-D आकार, चित्र आदि देखकर समझ सकना।
- तालिका, संख्या रेखा, चित्रालेख, स्तंभ आलेख, चित्र आदि बना सकना।
- गणितीय संकेतों एवं आकारों को समझना।